

VON NULL AUF MATHE

Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung

Blick
ins Buch



ESTHER FREI

Einfache Verzinsung
Zinseszinsrechnung
Marchzins
Unterjähriger Zinssatz
Äquivalenter Zinssatz
Schulden und Abschreibung
Rentenarten
Barwert einer Rente
Darlehen
Vollkommene Konkurrenz
Marktgleichgewicht
Monopol: Preisbildung
Lin. Ungleichungssysteme
Lineare Optimierung



VON NULL AUF MATHE

Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung

ESTHER FREI

compendio
Bildungsmedien
Zur Ansicht

VON NULL AUF MATHE
Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und
Optimierung
Esther Frei

Copyright © 2026, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich

Satz: Reemers Publishing Services GmbH, Krefeld
Grafisches Konzept: icona basel gmbh
Coverbild: © Stefan Schmitz, Hamburg
Druck: Edubook AG, Merenschwand
Redaktion und didaktische Bearbeitung: Peter Jankovics

Printausgabe
ISBN: 978-3-7155-0139-0
Artikelnummer: 19542
Auflage: 1. Auflage 2026
Ausgabe: 01N26
Sprache: DE
XMA 511

E-Book-Ausgabe
ISBN: 978-3-7155-0140-6
Artikelnummer: E-19543
Auflage: 1. Auflage 2026
Ausgabe: 01N26
Sprache: DE
XMA 511

Compendio Bildungsmedien AG
Neunbrunnenstrasse 50
CH-8050 Zürich
Tel. +41 44 368 21 11
info@compendio.ch
www.compendio.ch

Alle Rechte, insbesondere die Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten. Der Inhalt des vorliegenden Lehrmittels ist nach
dem Urheberrechtsgesetz eine geistige Schöpfung und damit
geschützt.



Compendio Bildungsmedien AG unterstützt die Kampagne
«share fair»: www.share-fair.ch

Die Nutzung des Inhalts für den Unterricht ist nach Gesetz an
strenge Regeln gebunden. Aus veröffentlichten Lehrmitteln
dürfen bloss Ausschnitte, nicht aber ganze Kapitel oder gar das
ganze Lehrmittel kopiert, digital gespeichert in internen Netz-
werken der Schule für den Unterricht in der Klasse als Informati-
on und Dokumentation verwendet werden. Die Weitergabe von
Ausschnitten an Dritte ausserhalb dieses Kreises ist untersagt,
verletzt Rechte der Urheber und Urheberinnen sowie des Ver-
lags und wird geahndet.

Die ganze oder teilweise Weitergabe des Werks ausserhalb des
Unterrichts in kopierter, digital gespeicherter oder anderer Form
ohne schriftliche Einwilligung von Compendio Bildungsmedien AG
ist untersagt.

In diesem Lehrmittel sind Links auf Websites von Drittanbietern
angegeben. Inhalte dieser externen Websites geben nicht die
Haltung von Compendio wieder und Compendio übernimmt für
diese keine Gewähr, insbesondere hinsichtlich Rechtmässigkeit,
inhaltlicher Richtigkeit, Aktualität, Zuverlässigkeit oder Vollstän-
digkeit der verlinkten Inhalte. Die Datenschutzvorkehrungen auf
den verlinkten externen Websites obliegen dem Drittanbieter.
Bitte informieren Sie sich über den Datenschutz direkt auf die-
sen Websites.

Die Printausgabe dieses Buchs ist klimaneutral in der Schweiz
gedruckt worden. Die Druckerei Edubook AG hat sich einer Kli-
maprüfung unterzogen, die primär die Vermeidung und Redu-
zierung des CO₂-Ausstosses verfolgt. Verbleibende Emissionen
kompensiert das Unternehmen durch den Erwerb von CO₂-Zer-
tifikaten eines Schweizer Klimaschutzprojekts. Mehr zum Um-
weltbekenntnis von Compendio Bildungsmedien finden Sie
unter: www.compendio.ch/Umwelt

Inhaltsverzeichnis

Aufbau und Methodik des Lehrmittels	5
Vorwissen und Lernziele	7
<hr/>	
1 Wie wird der Zins auf ein Kapital berechnet?	8
1.1 Grundbegriffe der Zinsrechnung	8
1.2 Einfache Verzinsung	9
1.3 Marchzins	11
1.4 Zinseszinsrechnung	14
1.5 Umformungen der Zinseszinsformel	17
1.6 Gemischte Verzinsung	22
1.7 Übungsaufgaben	23
<hr/>	
2 Wie werden unterjährige Zinssätze berechnet?	24
2.1 Unterjährige Zinssätze	24
2.2 Äquivalenter Zinssatz	27
2.3 Übungsaufgaben	29
<hr/>	
3 Wo wird die Zinseszinsrechnung angewendet?	30
3.1 Schulden	30
3.2 Degressive Abschreibung	31
3.3 Übungsaufgaben	34
<hr/>	
4 Wie wird eine Rente berechnet?	35
4.1 Nachschüssige Rente	35
4.2 Umformung der Rentenformel	37
4.3 Vorschüssige Renten	40
4.4 Barwert einer Rente	42
4.5 Unterjährige Renten	45
4.6 Darlehen	47
4.7 Übungsaufgaben	48
<hr/>	
5 Wie wird der optimale Preis eines Produkts berechnet?	49
5.1 Das Modell der vollkommenen Konkurrenz	50
5.2 Das Marktgleichgewicht bei vollkommener Konkurrenz	54
5.3 Preisbildung bei Monopolen	56
5.4 Übungsaufgaben	60
<hr/>	
6 Wie wird ein lineares Ungleichungssystem gelöst?	61
6.1 Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung mit einer Variablen	62
6.2 Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung mit zwei Variablen	64
6.3 Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen	68
6.4 Übungsaufgaben	73

7	Wie wird ein lineares Optimierungsproblem gelöst?	74
7.1	Ein lineares Optimierungsproblem erkennen	75
7.2	Ein lineares Optimierungsproblem lösen	77
7.3	Anwendungen der linearen Optimierung	87
7.4	Übungsaufgaben	92

8	Lernkontrolle – vermischte Aufgaben	93
----------	--	-----------

	Zusammenfassung	95
	Lösungen zu den Aufgaben	102
	Stichwortverzeichnis	125

compendio
Bildungsmedien
Zur Ansicht

Vorwissen und Lernziele

Vorwissen

Erforderliches Vorwissen für «**Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung**»:

- Rechenoperationen und Zahlenbereiche
- Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- Lineare Gleichungen und Ungleichungen
- Lineare Gleichungssysteme
- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen

Lernziele

Nach der Bearbeitung dieses Lehrmittels können Sie ...

- Problemstellungen zu einfacher und gemischter Verzinsung lösen.
- die Grundformel der Zinseszinsrechnung auf Schulden und andere wirtschaftliche Bereiche anwenden.
- die Grundformel zur Berechnung des äquivalenten Zinssatzes einsetzen und nach allen Variablen auflösen.
- die Grundformel der Annuität im wirtschaftlichen Kontext anwenden und dabei nach allen Variablen (ausser dem Zins) auflösen.
- die Grundformel der Annuität auf Darlehen und Renten anwenden.
- weitere Aufgaben zur Kapitalisierung und Annuität lösen.
- Probleme der vollkommenen Konkurrenz mit linearen Funktionen für Angebot und Nachfrage modellieren und algebraisch lösen.
- die Preisbildung bei Monopolen erklären sowie mit einfachen Modellen den optimalen Preis und die Gewinnzone ermitteln.
- gegebene Sachverhalte im wirtschaftlichen Kontext als Ungleichung oder Ungleichungssystem formulieren.
- die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems mit zwei Variablen grafisch veranschaulichen und interpretieren.
- lineare Optimierungsprobleme mit zwei Variablen erkennen, grafisch veranschaulichen und lösen.
- die lineare Optimierung in Anwendungsaufgaben aus dem Finanzbereich, der Produktion und der Logistik anwenden.

1.2 Einfache Verzinsung

Bei der **einfachen Verzinsung** wird immer nur das Anfangskapital verzinst. Die jährlichen Zinsen werden im darauffolgenden Jahr nicht mitverzinst. Somit bleibt der Zinsbetrag in jeder Zinsperiode konstant. Der Zinsbetrag Z errechnet sich aus dem Anfangskapital K_0 und einem Zinssatz p wie folgt:

$$Z = \frac{K_0 \cdot p}{100}$$

Beispiele:

Wir legen ein Kapital von 1 000.– CHF für ein Jahr zu einem Zinssatz von 2.5% an. Pro Jahr ergibt sich ein Zinsbetrag von $Z = \frac{1000 \cdot 2.5}{100} = 25$ (CHF).

Das Endkapital wird berechnet, indem der Zinsbetrag zum Anfangskapital dazugerechnet wird.

Legen wir den Betrag von 1 000.– CHF für ein Jahr zu einem Zinssatz von 2.5% an, so ist das Endkapital $K_1 = K_0 + Z = 1000 + \frac{1000 \cdot 2.5}{100} = 1025$ (CHF).

Ist das Kapital über mehrere Zinsperioden angelegt, so summiert sich der Zinsbetrag auf.

Legen wir den Betrag von 1 000.– CHF für ein Jahr zu einem Zinssatz von 2.5% an, so ist jedes Jahr der Zinsbetrag von 25.– CHF geschuldet. Nach zehn Jahren kommt ein (aufsummierter) Zinsbetrag von $10 \cdot 25 = 250$ (CHF) zusammen. Das Endkapital beträgt somit nach zehn Jahren $K_{10} = K_0 + 250 = 1250$ (CHF).

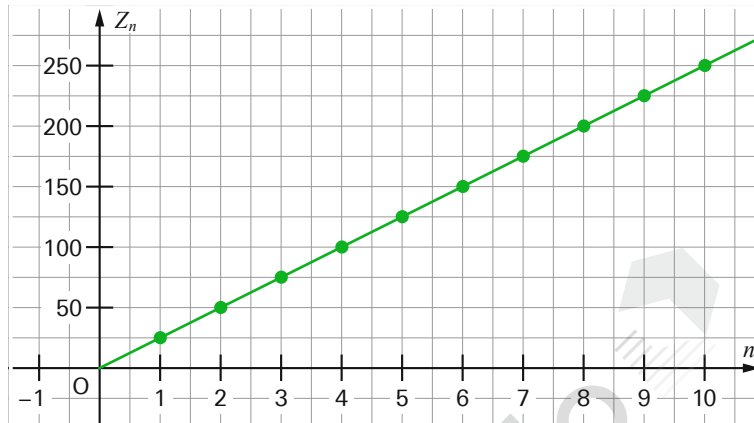
Allgemein lässt sich der (aufsummierte) Zinsbetrag für n Zinsperioden berechnen durch:

$$Z_n = \frac{n \cdot K_0 \cdot p}{100}$$

Berechnen wir damit den Zinsbetrag für 1, 2, 3, ..., 10 Jahre für ein zu 2.5% verzinstes Kapital von 1 000.– CHF, so ergibt sich folgende Wertetabelle (n ist die Laufzeit in Jahren; Z_n ist der aufsummierte Zinsbetrag nach n Jahren):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_n	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250

Wir zeichnen diese Punkte in ein Koordinatensystem ein und erhalten so einzelne Punkte, die alle auf einer Geraden liegen:



Das Kapital K_n nach n Jahren ist das Anfangskapital plus der aufsummierte Zinsbetrag Z_n :

$$K_n = K_0 + Z_n = K_0 + \frac{n \cdot K_0 \cdot p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$$

Wir fassen die Formeln bei einfacher Verzinsung zusammen:

Einfache Verzinsung

Bei der **einfachen Verzinsung** bleibt der **Zinsbetrag** Z für eine Zinsperiode über die gesamte Laufzeit konstant. Er berechnet sich für ein Anfangskapital K_0 und einen Zinssatz p wie folgt:

$$Z = \frac{K_0 \cdot p}{100}$$

Der aufsummierte Zinsbetrag Z_n nach n Zinsperioden berechnet sich durch:

$$Z_n = \frac{n \cdot K_0 \cdot p}{100}$$

Das Endkapital K_n nach n Zinsperioden ist das Anfangskapital K_0 plus der aufsummierte Zinsbetrag Z_n :

$$K_n = K_0 + Z_n = K_0 + \frac{n \cdot K_0 \cdot p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{n \cdot p}{100}\right)$$

Wir fassen zusammen:

Verzinsung mit Zinseszins

Bei der Verzinsung mit **Zinseszinsen** wird am Ende jeder Zinsperiode der Zinsbetrag zum zinstragenden Kapital hinzugerechnet. Das Kapital K_n nach n Zinsperioden berechnet sich für ein Anfangskapital K_0 und einen Zinssatz p wie folgt:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Der Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$ heisst **Zinsfaktor**. Mit ihm ergibt sich die Formel:

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

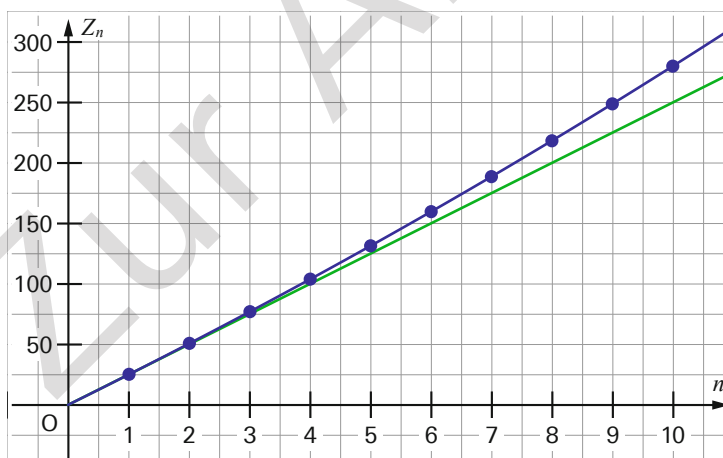
Der aufsummierte Zinsbetrag nach n Jahren ist das Endkapital K_n minus dem Anfangskapital K_0 :

$$Z_n = K_n - K_0 = K_0 \cdot q^n - K_0$$

Berechnen wir den Zinsbetrag für 1, 2, 3, ..., 10 Jahre für ein zu 2.5% verzinsteres Kapital von 1000.– CHF, so ergibt sich folgende Wertetabelle (n ist die Laufzeit in Jahren; Z_n ist der aufsummierte Zinsbetrag nach n Jahren):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z_n	25	50.63	76.89	103.81	131.41	159.69	188.69	218.40	248.86	280.08

Dies stellen wir grafisch dar (blauer Graph) und vergleichen den Verlauf mit der einfachen Verzinsung (grüner Graph):



Anfangskapital gesucht

Wenn wir aus dem gegebenen Endkapital K_n und dem Zinssatz p (oder Zinsfaktor q) das Anfangskapital K_0 suchen, lösen wir die Gleichung nach K_0 auf:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad |:q^n$$

$$\frac{K_n}{q^n} = K_0$$

Zinssatz gesucht

Ist nach dem Zinsfaktor q oder dem Zinssatz p gefragt, so müssen wir eine Potenzgleichung lösen, da die Unbekannte die Basis einer Potenz ist. Wir lösen durch Wurzelziehen:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad |:K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = q^n \quad |\sqrt[n]{\quad}$$

$$\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = q$$

Aus $q = 1 + \frac{p}{100}$ folgt der Zinssatz $p = 100 \cdot (q - 1)$.

Anzahl der Zinsperioden gesucht

Ist nach der Laufzeit, also nach der Anzahl der Zinsperioden n , gefragt, so steht die Unbekannte n im Exponenten einer Potenz. Wir müssen daher eine Exponentialgleichung lösen. Das geschieht durch Logarithmieren:

$$K_n = K_0 \cdot q^n \quad |:K_0$$

$$\frac{K_n}{K_0} = q^n \quad |\lg \text{ (Zehnerlogarithmus anwenden)}$$

$$\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = \lg(q^n) \quad |\text{TU (Logarithmusgesetz für Potenzen)}$$

$$\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right) = n \cdot \lg(q) \quad |: \lg(q)$$

$$\frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(q)} = n$$

Beispiele:

Flavia möchte ihrer Patentochter Alina zum 18. Geburtstag einen Betrag von 5000.– CHF schenken. Dazu eröffnet sie zur Geburt von Alina ein Konto mit einem Zinssatz von 5%. Welchen Betrag muss Flavia bei der Geburt von Alina anlegen, damit der Kontostand am 18. Geburtstag 5000.– CHF ist?

Es ist das Anfangskapital gesucht. Wir setzen die gegebenen Werte und $q = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$ in die Formel ein:

$$K_0 = \frac{K_n}{q^n} = \frac{5000}{1.05^{18}} = 2077.60$$

Flavia muss den Betrag von 2077.60 CHF anlegen.

Hans hat vor 30 Jahren ein Kapital von 25000.– CHF angelegt. Heute stehen ihm dadurch 60681.60 CHF zur Verfügung. Zu welchem Zinssatz konnte Hans das Kapital anlegen?

Es ist nach dem Zinssatz gefragt. Wir berechnen erst den Zinsfaktor:

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[30]{\frac{60681.6}{25000}} = 1.03$$

Dann den Zinssatz:

$$p = 100 \cdot (q - 1) = 100 \cdot (1.03 - 1) = 3$$

Hans hat das Kapital zu 3% angelegt.

Wie viele ganze Jahre muss Luc ein Kapital von 10000.– CHF anlegen, um bei einem Zinssatz von 1% am Ende mindestens 12000.– CHF zu erhalten?

Es ist nach der Anzahl der Zinsperioden gefragt. Mit $q = 1 + \frac{1}{100} = 1.01$ folgt:

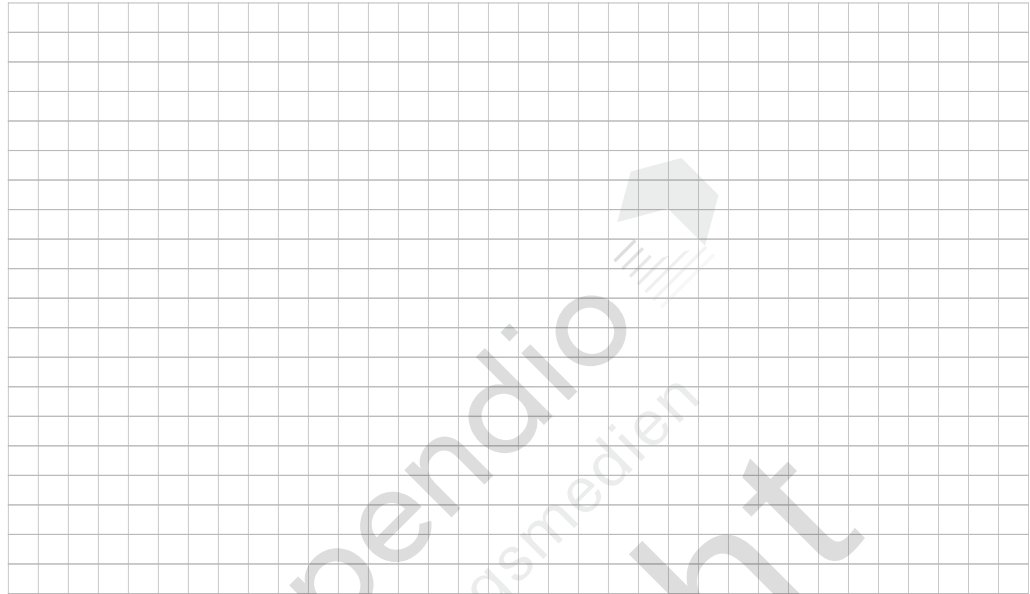
$$n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(q)} = \frac{\lg\left(\frac{12000}{10000}\right)}{\lg(1.01)} = \frac{\lg(1.2)}{\lg(1.01)} = 18.32$$

Die Anzahl Jahre muss eine ganze Zahl sein. Daher müssen wir den Wert 18.32 aufrunden, um am Ende mindestens 12000.– CHF zu erhalten. Luc muss das Kapital 19 Jahre anlegen.

3 Wo wird die Zinseszinsrechnung angewendet?

Aufgabe 17

Welche Kredithöhe kann Elias bei einer Bank mit einem Zinssatz von 3% aufnehmen, wenn er bereit ist, in einem Jahr 600.– CHF an Zinsen zu bezahlen?



3.1 Schulden

Wenn wir uns Geld leihen, verlangt der Kreditgeber einen Zins. Die Berechnung der Zinsen und Zinseszinsen bei Krediten funktioniert genau gleich wie beim Sparen. Gerade bei grossen Beträgen ist darauf zu achten, dass die Zinseszinsen nicht unterschätzt werden.

Beispiele:

Mauro möchte sich ein neues Auto im Wert von 50 000.– CHF kaufen und nimmt dafür bei der Bank einen Kredit auf. Die Bank verlangt einen Zins von 2%. Der Kredit soll zusammen mit den aufgelaufenen Zinsen nach 3 Jahren zurückbezahlt werden. Wie viel muss Mauro am Ende bezahlen?

Wir verwenden hier die Formel

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

zur Berechnung des Betrags, den Mauro am Ende bezahlen muss:

$$K_3 = 50000 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^3 = 53060.4$$

Somit muss Mauro am Ende 53 060.40 CHF bezahlen. Das heisst, er bezahlt 3 060.40 CHF Zinsen.

Kleinkredite werden oft mit einer vierteljährlichen oder monatlichen Zinsperiode verzinst. Entsprechend verwenden wir die Formeln für die unterjährige Verzinsung.

Beispiel:

Wir berechnen das Kapital, das wir nach 10 Jahren auf dem Konto haben, wenn wir bei einem Zinssatz von 2% Ende jeden Jahres 500.– CHF auf ein Konto einzahlen.

Die gegebenen Werte setzen wir in die Formel $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ein:

$$R_{10} = 500 \cdot \frac{1.02^{10} - 1}{1.02 - 1} = 5474.86$$

Am Ende des 10. Jahres haben wir 5474.86 CHF auf dem Konto.

Aufgabe 26

Robin legt während 20 Jahren Ende jeden Jahres 2000.– CHF auf ein Konto mit einem Zinssatz von 0.5%. Wie viel Geld steht ihm nach 20 Jahren zur Verfügung?

4.2 Umformung der Rentenformel

Wir haben bei der nachschüssigen Rentenrechnung die folgende Formel für den Endwert erhalten:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Ist nun der Endwert gegeben und eine andere Grösse gesucht, müssen wir die Formel umformen.

Rentenbetrag gesucht

Wenn wir aus dem gegebenen Endwert R_n den Rentenbetrag r suchen, lösen wir die Formel nach r auf:

$$R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad | \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

$$R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1} = r$$

Anzahl der Jahre gesucht

Ist nach der Laufzeit, also nach der Anzahl der Jahre n , gefragt, so steht die Unbekannte n im Exponenten einer Potenz. Wir müssen daher eine Exponentialgleichung lösen. Das geschieht durch Logarithmieren:

$$\begin{aligned}
 R_n &= r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} && |:r \\
 \frac{R_n}{r} &= \frac{q^n - 1}{q - 1} && | \cdot (q - 1) \\
 \frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} &= q^n - 1 && |+1 \\
 \frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} + 1 &= q^n && |\lg \text{ (Zehnerlogarithmus anwenden)} \\
 \lg\left(\frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} + 1\right) &= \lg(q^n) && |\text{TU (Logarithmusgesetz für Potenzen)} \\
 \lg\left(\frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} + 1\right) &= n \cdot \lg(q) && |: \lg(q) \\
 \frac{\lg\left(\frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)} &= n
 \end{aligned}$$

Den Zinssatz können wir aus der Formel nicht berechnen, denn die Renten-Formel lässt sich nicht nach q auflösen.

Wir fassen die Formeln zusammen:

Berechnung der Grössen aus der nachschüssigen Rentenformel

Ist $R_n = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ der Endwert nach n Jahren, r der Rentenbetrag, p der Zinssatz und $q = 1 + \frac{p}{100}$ der Zinsfaktor, dann lassen sich die Grössen wie folgt berechnen:

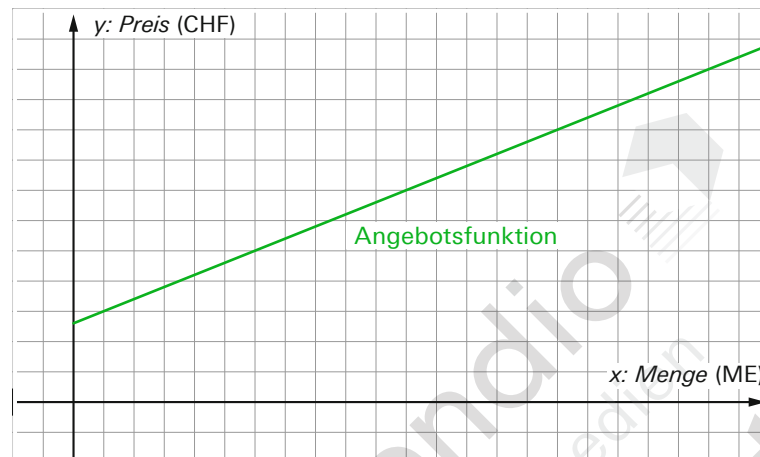
Rentenbetrag

$$r = R_n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$$

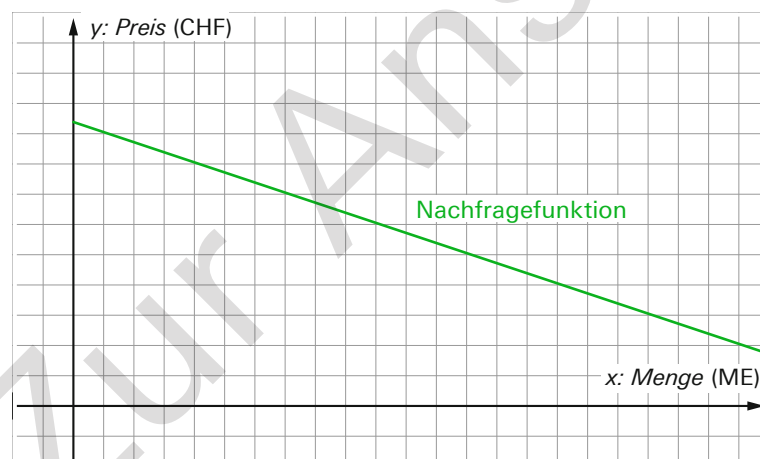
Anzahl der Jahre

$$n = \frac{\lg\left(\frac{R_n \cdot (q - 1)}{r} + 1\right)}{\lg(q)}$$

Dieser Zusammenhang kann in einem Koordinatensystem grafisch dargestellt werden. Auf der vertikalen Achse wird der **Preis** in CHF, auf der horizontalen die **Menge** in Mengeneinheiten (ME) abgetragen. Statt CHF können auch andere Währungen stehen und die Mengeneinheit ist abhängig vom angebotenen Produkt, sie kann z. B. Kilogramm, Liter oder Stück sein. Weil das Angebot grösser ist, je grösser der Preis ist, handelt es sich bei der **Angebotsfunktion** um eine **steigende Gerade**:



Bei der **Nachfrage** verhält es sich anders. Die Nachfrage ist die Bereitschaft der Nachfrager, eine bestimmte Menge eines Produkts zu einem bestimmten Preis zu kaufen. Weil die Nachfrager einen möglichst tiefen Preis bezahlen möchten, ist die (nachgefragte) **Menge** grösser, je tiefer der Preis eines Produkts ist. Ist der Preis hingegen hoch, sind nur wenige bereit, das Produkt zu kaufen. Daher ist die Nachfrage bei einem hohen Preis klein. Weil die Nachfrage kleiner ist, je grösser der Preis ist, handelt es sich bei der **Nachfragefunktion** um eine **fallende Gerade**:



Angebots- und Nachfragefunktion

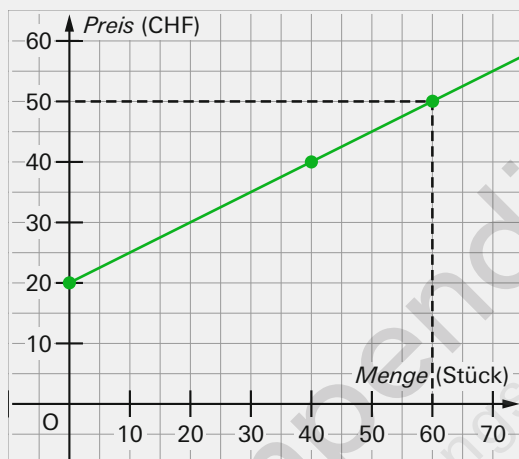
Die **Angebotsfunktion** stellt den Zusammenhang zwischen dem Preis eines Produkts und der angebotenen Gütermenge dar.

Die **Nachfragefunktion** stellt den Zusammenhang zwischen dem Preis eines Produkts und der nachgefragten Gütermenge dar.

Beispiele:

Ein Produkt wird bei einem Preis von 20.– CHF nicht angeboten. Bei einem Preis von 40.– CHF werden hingegen 40 Stück angeboten. Bei welchem Preis werden 60 Stück angeboten?

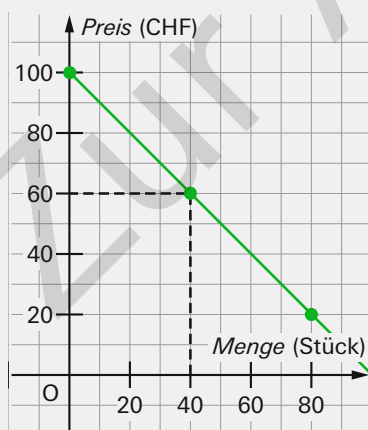
Die Angebotsfunktion kann durch eine Gerade beschrieben werden, die die beiden Punkte $(0|20)$ und $(40|40)$ enthält. Die zugehörige Geradengleichung ist $y = \frac{1}{2}x + 20$. Es handelt sich um eine steigende Gerade:



Wir sehen, bei einem Preis von 50.– CHF werden 60 Stück des Produkts angeboten.

Bei einem Preis von 20.– CHF pro Stück werden 80 Stück eines Produkts nachgefragt, bei einem Preis von 100.– CHF pro Stück wird das Produkt jedoch nicht gekauft. Bei welchem Preis werden 40 Stück nachgefragt?

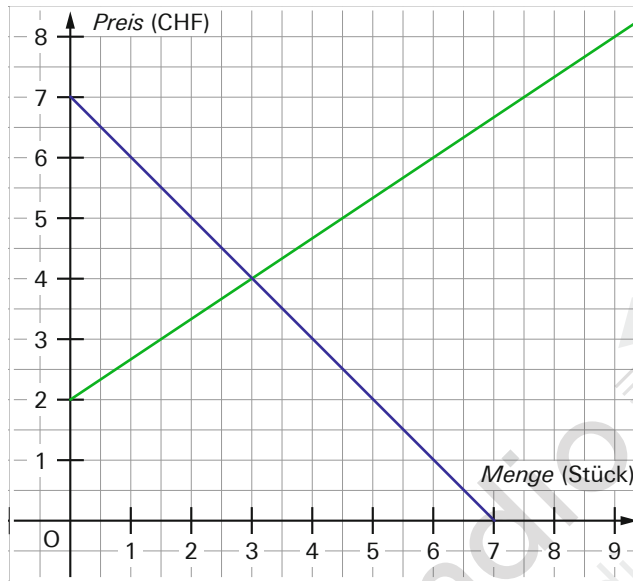
Die Nachfragefunktion kann durch eine Gerade beschrieben werden, die die beiden Punkte $(0|100)$ und $(80|20)$ enthält. Die zugehörige Geradengleichung ist $y = -x + 100$. Es handelt sich um eine fallende Gerade:



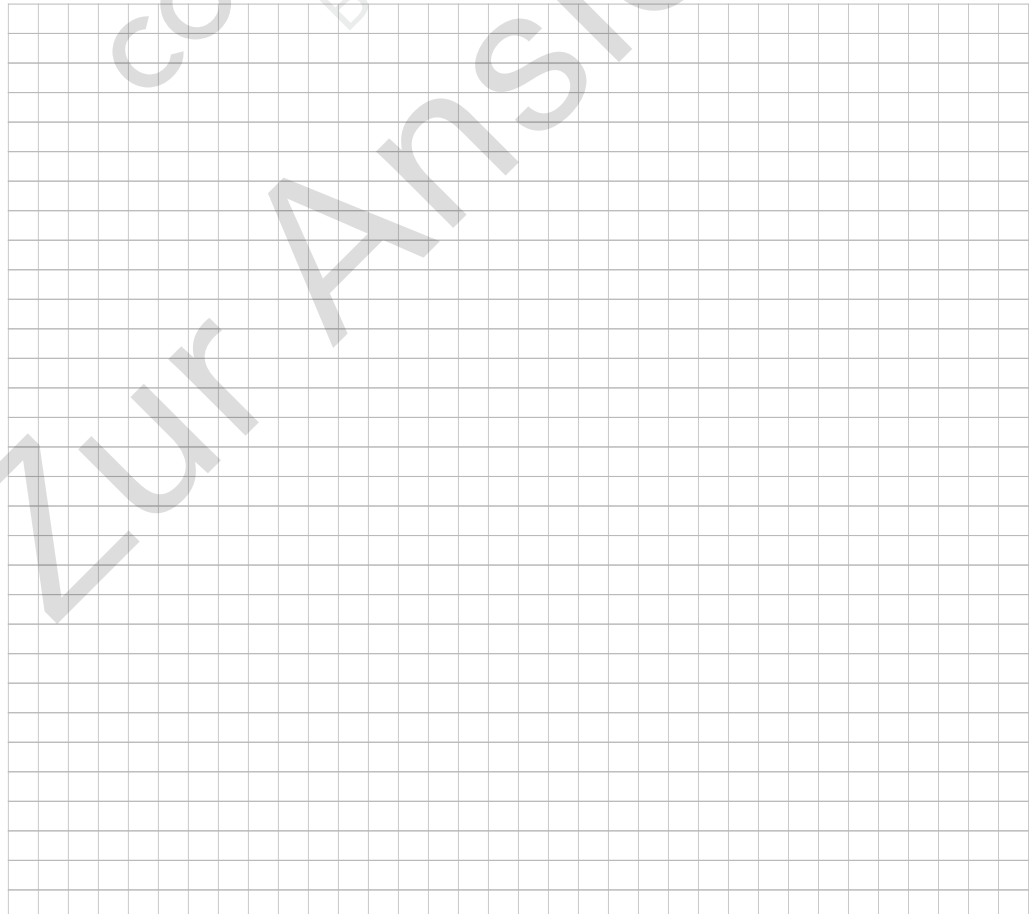
Wir sehen, bei einem Preis von 60.– CHF werden 40 Stück des Produkts nachgefragt.

Aufgabe 37

Ein Produkt besitzt die abgebildete Angebots- (grün) und Nachfragefunktion (blau):

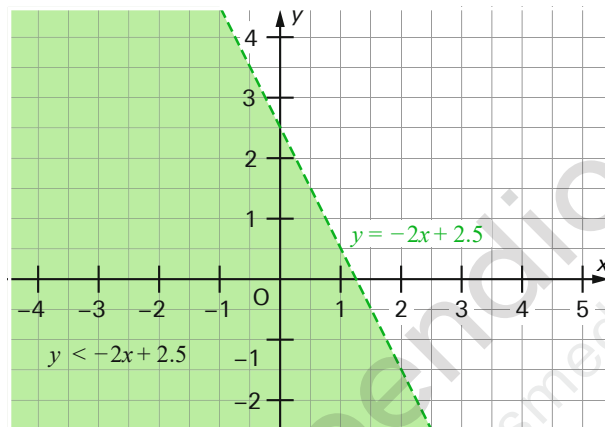


- Geben Sie die Funktionsgleichungen der Angebots- und der Nachfragefunktion an.
- Bei welchem Preis werden 6 Stück des Produkts angeboten?
- Bei welchem Preis werden 6 Stück nachgefragt?
- Bei welchem Preis ist die angebotene Menge gleich der nachgefragten Menge?



Beispielsweise liegen die Punkte $(-1|4)$ und $(1|-2)$ unterhalb der Geraden und gehören somit zur Lösungsmenge der Ungleichung $4x + 2y \leq 5$, was man durch Einsetzen der Koordinaten in die Ungleichung bestätigen kann: $4 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 \leq 5$ und $4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \leq 5$ sind jeweils wahre Aussagen.

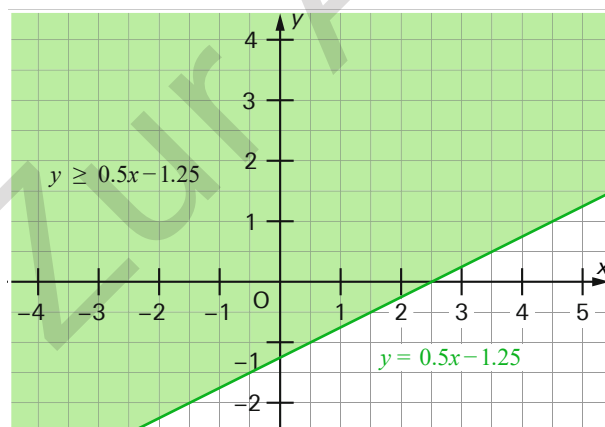
Betrachten wir die Ungleichung $y < -2x + 2.5$ statt $y \leq -2x + 2.5$, so gehören alle Punkte der Halbebene unter der Geraden $y = -2x + 2.5$ zur Lösungsmenge, aber nicht die Gerade selbst. Grafisch kennzeichnen wir dies so, dass wir die Gerade statt durchgezogen nur gestrichelt einzeichnen:



Als weiteres Beispiel suchen wir die Lösungsmenge der Ungleichung $2x - 4y \leq 5$. Wir lösen diese Ungleichung nach y auf:

$$\begin{aligned} 2x - 4y &\leq 5 && | -2x \\ -4y &\leq -2x + 5 && | :(-4) \\ y &\geq 0.5x - 1.25 \end{aligned}$$

Dabei müssen wir daran denken, dass bei der Division durch -4 das Vergleichszeichen umgedreht werden muss. Somit erhalten wir als Lösungsmenge alle Punkte der Geraden $y = 0.5x - 1.25$ sowie alle Punkte der Halbebene über der Geraden:



Wir haben bisher eine lineare Ungleichung mit 2 Variablen, wie $ax + by < c$, immer nach y aufgelöst und dann die entstandene Gerade $y = mx + q$ betrachtet. Was passiert aber, wenn $b = 0$ ist, wenn es also kein y in der Ungleichung gibt. Wir zeigen das am Beispiel $-3x \leq 6$.

Es ist auch möglich, dass ein Ungleichungssystem keine Lösung besitzt. Das ist dann der Fall, wenn die einzelnen Lösungsflächen sich nicht überdecken, die Schnittmenge der Lösungsmengen ist dann leer.

Beispiele:

Wir lösen das Ungleichungssystem

$$\text{I: } x - y \leq 3$$

$$\text{II: } 2x \geq 6$$

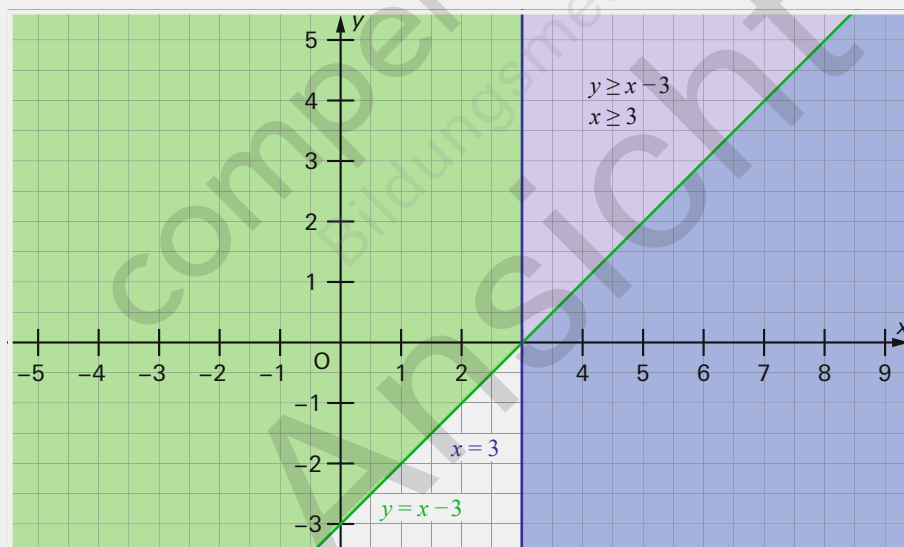
grafisch.

Die erste Gleichung lösen wir nach y auf, die zweite nach x , da es dort kein y gibt:

$$\text{I: } y \geq x - 3$$

$$\text{II: } x \geq 3$$

Wir stellen die Lösungsmengen der beiden Ungleichungen im Koordinatensystem dar:



Der Fläche im lila Bereich (inklusive Grenzlinien) entspricht der Lösungsmenge des Ungleichungssystems.

Nehmen wir noch eine dritte Ungleichung dazu, so kann es sich auch ergeben, dass die Lösungsmenge eine begrenzte Fläche (ein Dreieck) ist oder nur aus einem einzigen Punkt besteht.

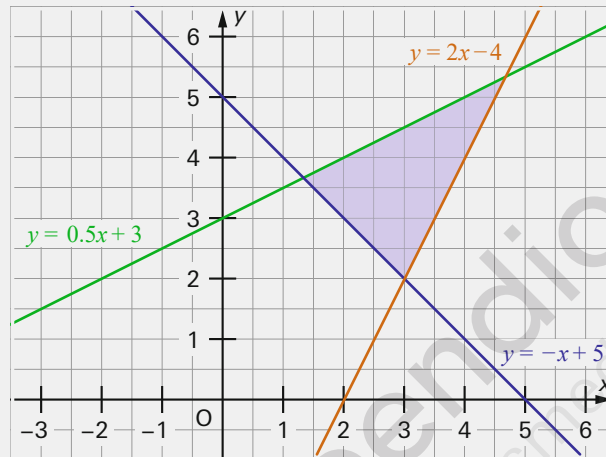
Wir stellen die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\text{I: } y \leq 0.5x + 3$$

$$\text{II: } y \geq -x + 5$$

$$\text{III: } y \geq 2x - 4$$

grafisch dar:



Der Fläche im lila Bereich (inklusive Grenzlinien) entspricht der Lösungsmenge des Ungleichungssystems.

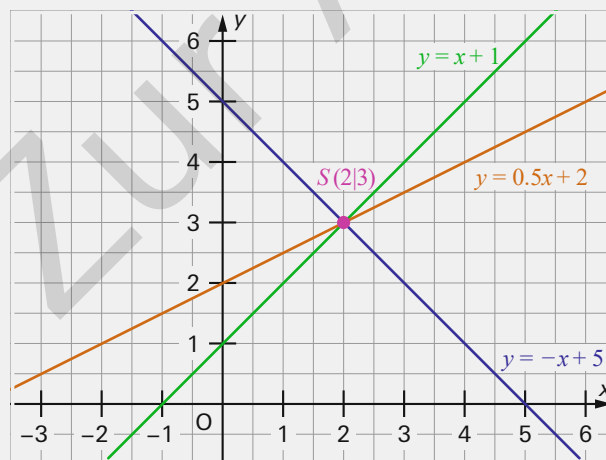
Wir stellen die Lösungsmenge des Ungleichungssystems

$$\text{I: } y \geq x + 1$$

$$\text{II: } y \geq -x + 5$$

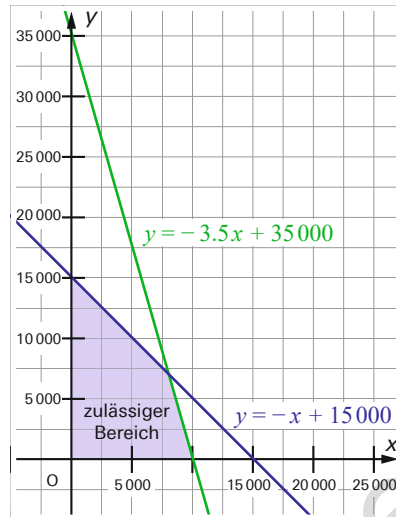
$$\text{III: } y \leq 0.5x + 2$$

grafisch dar:



Die drei Grenzlinien der Ungleichungen schneiden sich in einem Punkt. Die Lösungsmenge des Ungleichungssystems besteht also nur aus dem Schnittpunkt $S(2|3)$.

Da die Anzahl der Kisten nicht negativ sein kann, betrachten wir zusätzlich nur nichtnegative Lösungen, d. h. $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Diese Bedingung ergibt sich nicht aus dem Text, sondern aus dem Sachzusammenhang, sie wird **Nichtnegativitätsbedingung** genannt. Das bedeutet grafisch, dass das Lösungsgebiet des Ungleichungssystems auf den I. Quadranten im Koordinatensystem eingeschränkt wird:



Das Gebiet mit den Punkten $(x|y)$, die das Ungleichungssystem im I. Quadranten lösen, heisst **zulässiger Bereich**. Die Optimierungsaufgabe besteht jetzt darin, innerhalb des zulässigen Bereichs den einen Punkt zu ermitteln, für den die Zielfunktion $G = 15x + 5y$ den grössten Wert annimmt. Dieser Punkt heisst **optimale Lösung**.

Im Folgenden betrachten wir nur Optimierungsprobleme mit zwei Variablen und formulieren allgemein:

Lineare Optimierung

Die **lineare Optimierung** ist ein Verfahren zur Maximierung bzw. Minimierung einer linearen Funktion Z mit zwei Variablen x und y , die bestimmte Einschränkungen unterliegen.

Die Bestandteile der linearen Optimierung sind:

- Die **Zielfunktion** $Z = ax + by$, die optimiert (maximiert oder minimiert) werden soll
- Die **Nebenbedingungen**, die sich jeweils als lineare Ungleichungen mit \geq bzw. \leq darstellen lassen und damit ein **lineares Ungleichungssystem** festlegen
- Die Bedingung der **Nichtnegativität**, d. h., die Variablen werden nur für grösser oder gleich null betrachtet: $x \geq 0$ und $y \geq 0$

Das Gebiet mit den Punkten $(x|y)$, die das lineare Ungleichungssystem im I. Quadranten des Koordinatensystems erfüllen, heisst **zulässiger Bereich**. Der Punkt im zulässigen Bereich, der die Zielfunktion optimiert, heisst **optimale Lösung**.

Die Ungleichungen der Nebenbedingungen dürfen nur mit \geq oder \leq dargestellt werden. Die Symbole $>$ und $<$ werden ausgeschlossen, da eine optimale Lösung immer nur auf dem Rand eines zulässigen Bereichs zu finden ist.

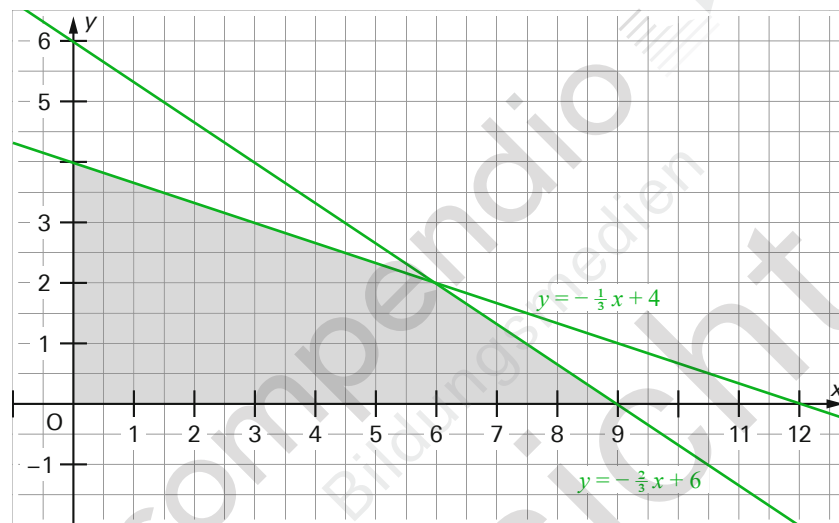
In manchen Fällen führt eine Nebenbedingung auch auf eine Gleichung wie $x + y = 1$. Das ist auch erlaubt, der zulässige Bereich ist dann aber nur ein Stück dieser Geraden und kein flächiges Gebiet.

Zuerst ermitteln wir den zulässigen Bereich. Dazu schreiben wir das Ungleichungssystem um:

$$\text{I: } y \leq -\frac{1}{3}x + 4$$

$$\text{II: } y \leq -\frac{2}{3}x + 6$$

Der zulässige Bereich ist also durch die Geraden $y = -\frac{1}{3}x + 4$ und $y = -\frac{2}{3}x + 6$ (und durch die Koordinatenachsen) begrenzt:

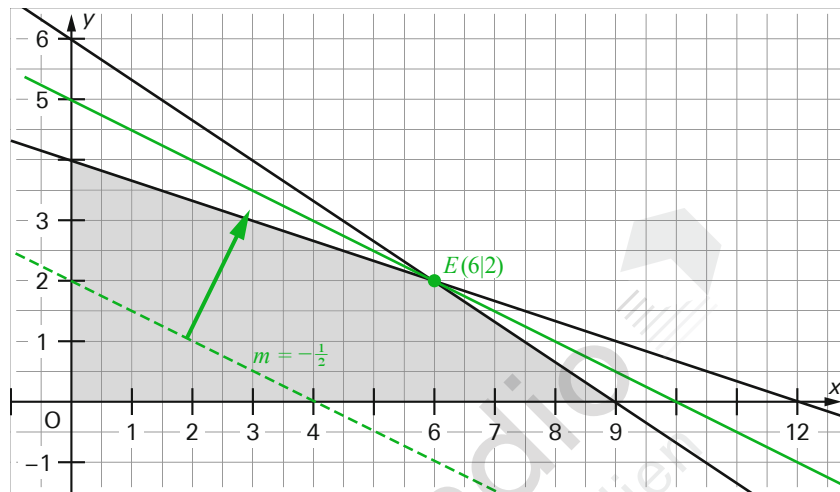


Aus dem zulässigen Bereich soll nun diejenige Lösung gesucht werden, die die Zielfunktion $Z = 225x + 450y$ maximiert. Um diese optimale Lösung zu bestimmen, lösen wir die Zielfunktion nach y auf und erhalten:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{Z}{450}$$

Den Wert von Z kennen wir nicht, aber welchen Wert für Z wir auch einsetzen, wir erhalten immer eine Gerade mit der Steigung $-\frac{1}{2}$. Beispielsweise erhalten wir für $Z = 900$ die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 2$ und für $Z = 1350$ die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Alle diese Geraden sind parallel zueinander und unterscheiden sich nur im y -Achsenabschnitt, der durch den Wert $\frac{Z}{450}$ gegeben ist. Je grösser also Z ist, desto grösser ist auch der y -Achsenabschnitt, und umgekehrt. Das heisst, je weiter oben die Gerade verläuft, desto grösser ist der Wert von Z . Um also einen möglichst grossen Wert für Z zu erhalten, müssen wir eine Gerade mit der Steigung $-\frac{1}{2}$ so weit wie möglich nach oben verschieben, ohne dass sie dabei den zulässigen Bereich ganz verlässt.

Wir nehmen hier die Gerade $y = -\frac{1}{2}x + 2$, die quer durch den zulässigen Bereich verläuft, und verschieben sie parallel nach oben, bis sie gerade noch den Rand berührt:



Wir sehen, die so verschobene Gerade berührt den zulässigen Bereich im Eckpunkt $E(6|2)$, das ist die **optimale Lösung** des Problems. Dass die optimale Lösung ein Eckpunkt ist, ist der Normalfall, aber nicht immer können wir die Koordinaten genau ablesen. Der Eckpunkt lässt sich als Schnittpunkt berechnen. In unserem Fall ist der Eckpunkt (die optimale Lösung) der Schnittpunkt der Geraden $y = -\frac{1}{3}x + 4$ und $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

Den **maximalen Wert** Z_{max} erhalten wir durch Einsetzen der Koordinaten der optimalen Lösung $x = 6$ und $y = 2$ in die Zielfunktion:

$$Z_{max} = 225 \cdot 6 + 450 \cdot 2 = 2250$$

Analog gehen wir vor, wenn die Zielfunktion minimiert werden soll. Dann müssen wir nur die Gerade nach unten verschieben, bis sie gerade noch den zulässigen Bereich berührt. Auf diese Art werden im Allgemeinen lineare Optimierungsprobleme gelöst:

Lösungsschema eines linearen Optimierungsproblems

Ein **lineares Optimierungsproblem** wird in folgenden Schritten gelöst:

1. Den **zulässigen Bereich** bestimmen.
2. Die **Zielfunktion** $Z = ax + by$ (mit $b \neq 0$) nach y auflösen: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{Z}{b}$.
3. Eine beliebige **Gerade** mit der Steigung $-\frac{a}{b}$ ins Koordinatensystem zeichnen. Diese **Gerade parallel verschieben**, sodass sie gerade noch den zulässigen Bereich berührt und einen maximalen bzw. minimalen y -Achsenabschnitt hat, je nachdem, ob die Zielfunktion maximiert oder minimiert werden soll.
4. Berührt die so verschobene Gerade einen Eckpunkt $E(u|v)$ des zulässigen Bereichs, dann ist $(u|v)$ die **optimale Lösung**. Die optimale Lösung kann dann als Schnittpunkt der entsprechenden Geraden rechnerisch ermittelt werden.
5. Den maximalen bzw. minimalen Wert der Zielfunktion durch Einsetzen von $x = u$ und $y = v$ in die Zielfunktion ermitteln: $Z_{max/min} = au + bv$.

Aufgabe 58

Wir führen x für die Anzahl Flaschen Weisswein und y für die Anzahl Flaschen Rotwein ein. Die Zielfunktion ist $Z = x + y$. Diese gilt es zu maximieren. Die Ungleichungen ergeben sich aus dem Text:

I: $11x + 14y \leq 850$

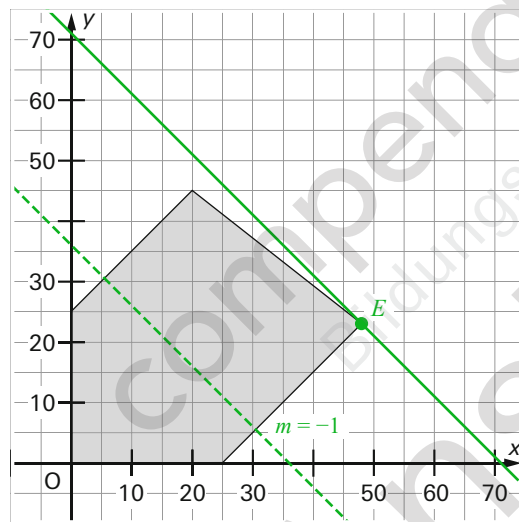
II: $x - y \leq 25$

III: $-x + y \leq 25$

Da es keine negative Anzahl gibt, ist die Nichtnegativitätsbedingung $x \geq 0, y \geq 0$ gegeben.

Der zulässige Bereich wird begrenzt durch die Geraden $y = -\frac{11}{14}x + \frac{850}{14}$, $y = x - 25$,

$y = x + 25$ und die Koordinatenachsen. Die nach y aufgelöste Zielfunktion ist $y = -x + Z$. Wir skizzieren eine beliebige Gerade mit Steigung -1 und verschieben sie so lange nach oben (in Richtung grössere Werte der Zielfunktion), bis sie den zulässigen Bereich gerade noch berührt:



Die Berührung findet in der Ecke E statt, die der Schnittpunkt der beiden Geraden $y = x - 25$ und $y = -\frac{11}{14}x + \frac{850}{14}$ ist. Daraus ergibt sich die optimale Lösung $E(48|23)$. Der maximale Wert

der Zielfunktion ist $Z_{max} = 48 + 23 = 71$.

Tim kauft 48 Flaschen Weisswein und 23 Flaschen Rotwein ein.

Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung

Die Lehrmittelreihe VON NULL AUF MATHE vermittelt alle grundlegenden Kompetenzen in Algebra, Analysis, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wirtschaftsmathematik. Sie führt Schritt für Schritt durch die Inhalte und steht Ihnen dabei als Lerncoach zur Seite.

Die Erklärungen beginnen bewusst bei den Grundlagen, um auch Lernenden ohne Vorkenntnisse den Einstieg zu erleichtern. Komplexe Themen werden in kleine, verständliche Einheiten gegliedert, die logisch aufeinander aufbauen. Das Konzept lädt zum aktiven Lernen ein. Sie werden motiviert, Aufgaben zu lösen und Ihren Lernerfolg durch Selbstreflexion zu überprüfen. Diese Arbeitsmethodik, unterstützt durch grafische Elemente, zieht sich wie ein roter Faden durch das gesamte Werk. In kleinen Schritten bauen Sie Ihr Wissen nachhaltig auf und schaffen so ein stabiles Fundament für Ihren Erfolg in Schule, Studium, Beruf und Alltag.

VON NULL AUF MATHE eignet sich ideal zum Selbstlernen, kann aber auch im Unterricht und in der Nachhilfe eingesetzt werden. Jeder Band ist in sich abgeschlossen und ermöglicht das gezielte Wiederholen oder Vertiefen einzelner Themen.

Die Reihe VON NULL AUF MATHE umfasst die folgenden elf Bände:

- Die Grundlagen des Rechnens: Zahlen, Brüche, Prozente und Potenzen
- Rechnen mit Buchstaben: Terme und Bruchterme
- Auf geradem Weg: lineare Gleichungen und Funktionen
- Im Bogen zum Ziel: quadratische Gleichungen und Funktionen
- Gemeinsame Lösungen: lineare Gleichungssysteme
- Das Prinzip der Zuordnung: Einführung in die Funktionen
- Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome
- Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Grundlagen der Statistik: Daten, Diagramme, Kennzahlen und Zusammenhänge
- Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik
- **Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung**

Compendio Bildungsmedien
www.compendio.ch

ISBN 978-3-7155-0139-0



ESTHER FREI Dipl. Math. ETH

Studium der Mathematik mit Diplom für das höhere Lehramt. War Aktuarin im Bereich Lebensversicherung bei einem schweizerischen Versicherungskonzern. Langjährige Unterrichtserfahrung in Mathematik und Informatik auf gymnasialer und Berufsmaturitätsstufe. Seit 2017 zusätzliche Tätigkeit als Prorektorin an der ISME.