

VON NULL AUF MATHE

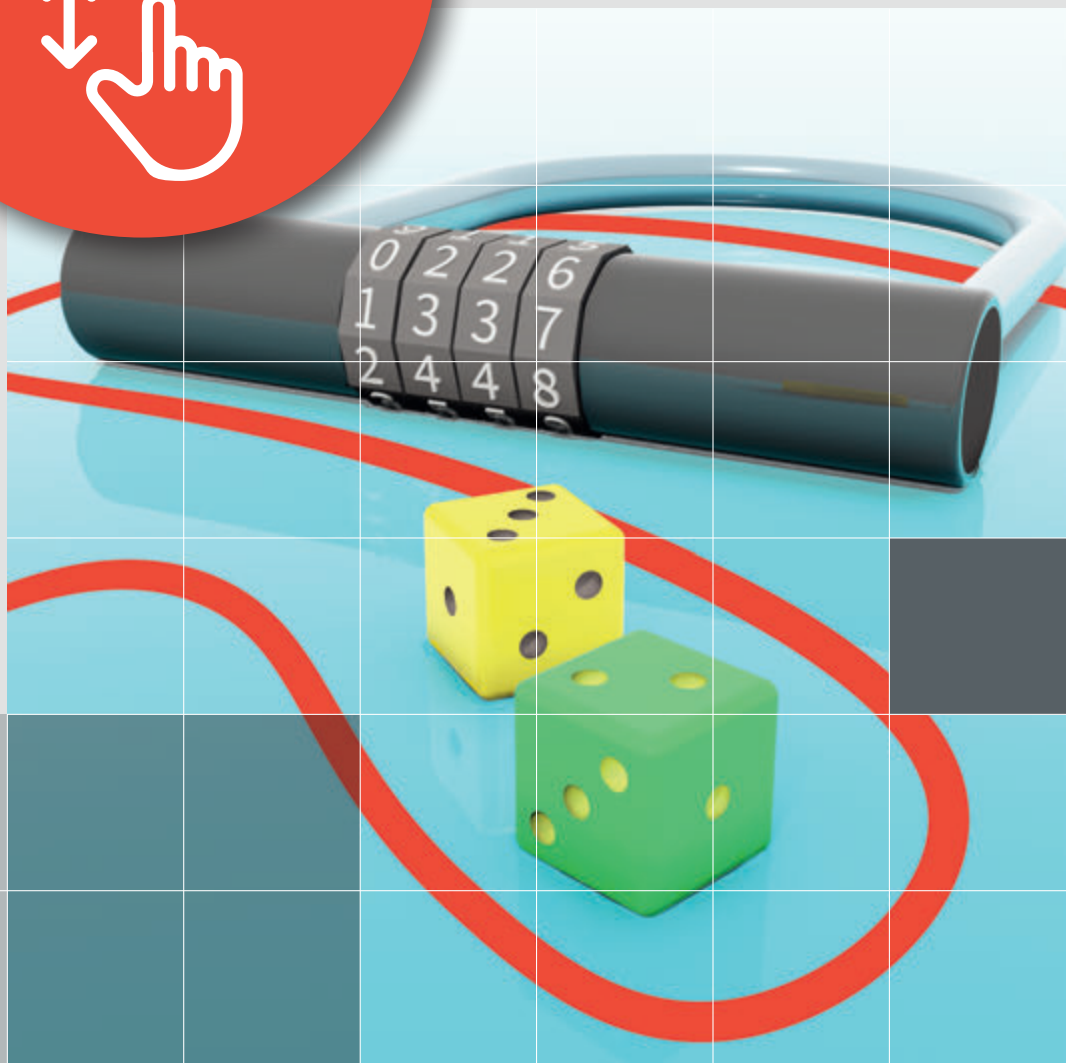
Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik

**Blick
ins Buch**



CHRISTOPH GERBER, PETER JANKOVICS

Zufallsexperimente
Mehrstufige Experimente
Urnenmodell
Ereignisse und Ergebnisse
Häufigkeiten
Wahrscheinlichkeiten
Ereignisse verknüpfen
Laplace-Experimente
Unabhängige Ereignisse
Multiplikationsprinzip
Fakultät und Anordnung
Binomialkoeffizient
Lottomodell



VON NULL AUF MATHE

Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik

CHRISTOPH GERBER, PETER JANKOVICS

compendio
Bildungsmedien
Zur Ansicht

Alle Rechte, insbesondere die Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Der Inhalt des vorliegenden Lehrmittels ist nach dem Urheberrechtsgesetz eine geistige Schöpfung und damit geschützt.



Compendio Bildungsmedien AG unterstützt die Kampagne «share fair»: www.share-fair.ch

VON NULL AUF MATHE
Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und
Kombinatorik
Christoph Gerber, Peter Jankovics

Copyright © 2026, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich

Satz: Reemers Publishing Services GmbH, Krefeld
Grafisches Konzept: icona basel gmbh
Coverbild: © Stefan Schmitz, Hamburg
Druck: Edubook AG, Merenschwand
Redaktion und didaktische Bearbeitung: Peter Jankovics

Printausgabe
ISBN: 978-3-7155-0137-6
Artikelnummer: 19539
Auflage: 1. Auflage 2026
Ausgabe: 01N26
Sprache: DE
XMA 510

E-Book-Ausgabe
ISBN: 978-3-7155-0138-3
Artikelnummer: E-19540
Auflage: 1. Auflage 2026
Ausgabe: 01N26
Sprache: DE
XMA 510

Compendio Bildungsmedien AG
Neunbrunnenstrasse 50
CH-8050 Zürich
Tel. +41 44 368 21 11
info@compendio.ch
www.compendio.ch

Die Nutzung des Inhalts für den Unterricht ist nach Gesetz an strenge Regeln gebunden. Aus veröffentlichten Lehrmitteln dürfen bloss Ausschnitte, nicht aber ganze Kapitel oder gar das ganze Lehrmittel kopiert, digital gespeichert in internen Netzwerken der Schule für den Unterricht in der Klasse als Information und Dokumentation verwendet werden. Die Weitergabe von Ausschnitten an Dritte ausserhalb dieses Kreises ist untersagt, verletzt Rechte der Urheber und Urheberinnen sowie des Verlags und wird geahndet.

Die ganze oder teilweise Weitergabe des Werks ausserhalb des Unterrichts in kopierter, digital gespeicherter oder anderer Form ohne schriftliche Einwilligung von Compendio Bildungsmedien AG ist untersagt.

In diesem Lehrmittel sind Links auf Websites von Drittanbietern angegeben. Inhalte dieser externen Websites geben nicht die Haltung von Compendio wieder und Compendio übernimmt für diese keine Gewähr, insbesondere hinsichtlich Rechtmässigkeit, inhaltlicher Richtigkeit, Aktualität, Zuverlässigkeit oder Vollständigkeit der verlinkten Inhalte. Die Datenschutzvorkehrungen auf den verlinkten externen Websites obliegen dem Drittanbieter. Bitte informieren Sie sich über den Datenschutz direkt auf diesen Websites.

Die Printausgabe dieses Buchs ist klimaneutral in der Schweiz gedruckt worden. Die Druckerei Edubook AG hat sich einer Klimaprüfung unterzogen, die primär die Vermeidung und Reduzierung des CO₂-Ausstosses verfolgt. Verbleibende Emissionen kompensiert das Unternehmen durch den Erwerb von CO₂-Zertifikaten eines Schweizer Klimaschutzprojekts. Mehr zum Umweltbekenntnis von Compendio Bildungsmedien finden Sie unter: www.compendio.ch/Umwelt

Inhaltsverzeichnis

Aufbau und Methodik des Lehrmittels	4
Vorwissen und Lernziele	6
<hr/>	
1 Was sind Zufallsexperimente und Ereignisse?	7
1.1 Zufallsexperimente und deren Ergebnisse	7
1.2 Mehrstufige Zufallsexperimente	10
1.3 Kugeln ziehen – so funktioniert das Urnenmodell	12
1.4 Ereignisse	13
1.5 Übungsaufgaben	15
<hr/>	
2 Was sind Wahrscheinlichkeiten?	17
2.1 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit	17
2.2 Die Wahrscheinlichkeit bei der Verknüpfung von Ereignissen	21
2.3 Übungsaufgaben	25
<hr/>	
3 Wie berechnet man Wahrscheinlichkeiten beim Laplace-Experiment?	27
3.1 Laplace-Experimente	27
3.2 Ereignisse bei Laplace-Experimenten	30
3.3 Übungsaufgaben	32
<hr/>	
4 Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeiten bei mehrstufigen Zufallsexperimenten?	34
4.1 Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses	35
4.2 Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses	42
4.3 Unabhängigkeit von Ereignissen	45
4.4 Übungsaufgaben	47
<hr/>	
5 Kombinatorik – wie bestimmt man die Anzahl möglicher Ergebnisse bei einem Zufallsexperiment?	49
5.1 Ziehen aus verschiedenen Urnen – das Multiplikationsprinzip	50
5.2 Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen	53
5.3 Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen	55
5.4 Ziehen aller Kugeln ohne Zurücklegen – die Fakultät	56
5.5 Ziehen aus einer Urne mit einem Griff – der Binomialkoeffizient	58
5.6 Das Lottomodell	61
5.7 Übungsaufgaben	63
<hr/>	
6 Lernkontrolle – vermischte Aufgaben	64
<hr/>	
Zusammenfassung	67
Lösungen zu den Aufgaben	71
Stichwortverzeichnis	90

Vorwissen und Lernziele

Vorwissen

Erforderliches Vorwissen für «Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik»:

- Grundrechenarten
- Grundlagen der Mengenlehre

Lernziele

Nach der Bearbeitung dieses Lehrmittels ...

- können Sie zufällige Vorgänge aus dem Alltagsleben als Zufallsexperiment erkennen und auf ein Urnenmodell übertragen.
- können Sie die Ergebnismenge eines Zufallsexperiments angeben.
- kennen Sie den Unterschied zwischen «Ergebnis» und «Ereignis».
- wissen Sie, was ein Elementarereignis, das sichere Ereignis, das unmögliche Ereignis und das Gegenereignis eines Zufallsexperiments ist.
- erkennen Sie die Anzahl der Stufen eines Zufallsexperiments.
- kennen Sie den Unterschied und den Zusammenhang von «Wahrscheinlichkeit» und «relativer Häufigkeit».
- kennen Sie das «Gesetz der grossen Zahlen».
- wissen Sie, wann zwei Ereignisse unvereinbar sind und wann sie unabhängig sind.
- wissen Sie, dass bei einem Laplace-Experiment die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse gleich gross sind.
- können Sie die Wahrscheinlichkeiten von Ergebnissen und Ereignissen bei Laplace-Experimenten berechnen.
- können Sie für mehrstufige Zufallsexperimente die zugehörigen Baumdiagramme erstellen.
- wissen Sie, wie man die Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente mit den Pfadregeln berechnet.
- kennen Sie die wichtigsten Abzählverfahren aus der Kombinatorik.
- kennen Sie die Fakultät und den Binomialkoeffizienten und können diese auf Sachzusammenhänge anwenden.
- können Sie berechnen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, im Lotto zu gewinnen.

1.3 Kugeln ziehen – so funktioniert das Urnenmodell

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung dient das **Urnenmodell** als anschauliches Hilfsmittel, um Wahrscheinlichkeiten und Zufallsprozesse zu erklären.

Das Urnenmodell besteht aus einer Urne, die eine bestimmte Anzahl von Kugeln enthält. Jede Kugel kann eine bestimmte Beschriftung oder Farbe haben. Die Anzahl der Kugeln, ihre Beschriftungen und Farben können variieren, je nachdem, welches spezifische Szenario betrachtet wird.

Das Modell basiert auf zwei grundlegenden Konzepten: Ziehen mit Zurücklegen und Ziehen ohne Zurücklegen.

Ziehen mit Zurücklegen

Bei diesem Modell wird eine Kugel aus der Urne gezogen, die Eigenschaften der Kugel werden notiert und dann wird die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt, bevor der nächste Zug stattfindet. Die Anzahl der Kugeln in der Urne bleibt bei allen Ziehungen unverändert.

Ziehen ohne Zurücklegen

Bei diesem Modell wird eine Kugel aus der Urne gezogen, die Eigenschaften der Kugel werden notiert, aber die Kugel wird nicht zurückgelegt. Dadurch ändert sich die Anzahl der Kugeln in der Urne mit jeder Ziehung.

Die meisten Zufallsexperimente können auf ein Urnenmodell übertragen und so simuliert werden.

Beispiele:

Zufallsexperiment	Urnenmodell
Aus einem Korb mit 3 grünen und 2 blauen Päckchen dürfen zwei Kinder nacheinander eins entnehmen und behalten.	5 Kugeln, davon 3 grüne und 2 blaue, zweimal ziehen ohne Zurücklegen .
Fünfmaliges Werfen einer Münze und jeweils «Kopf» oder «Zahl» notieren.	Eine schwarze und eine weiße Kugel, fünfmal ziehen mit Zurücklegen .
Zweimaliges Werfen eines Würfels und jeweils die Augenzahlen notieren.	6 Kugeln, von 1 bis 6 beschriftet, zweimal Ziehen mit Zurücklegen .
Schweizer Lotto: Ziehung von 6 Zahlen aus 42 möglichen	42 Kugeln, von 1 bis 42 beschriftet, sechsmal Ziehen ohne Zurücklegen .
5 Karten aus einem 32iger-Kartenspiel an einen Spieler verteilen.	32 Kugeln, mit den Kartenwerten beschriftet, fünfmal ziehen ohne Zurücklegen .
(Mehrmales) Roulette-Spiel	37 Kugeln, von 0 bis 36 beschriftet, (mehrmales) Ziehen mit Zurücklegen .

Werfen wir die Münze 10-mal hintereinander und bekommen dabei 4-mal Kopf, so ist die relative Häufigkeit $h(K) = \frac{4}{10} = 0.4$ für «Kopf». Werfen wir die Münze 100-mal und bekommen 43-mal Kopf, so ist $h(K) = \frac{43}{100} = 0.43$. Wenn wir die Anzahl der Versuche weiter steigern, könnte die Versuchsreihe folgendermassen aussehen:

Anzahl der Würfe	Abs. Häufigkeit für «Kopf»	Rel. Häufigkeit für «Kopf»
10	4	0.4
100	43	0.43
10 000	5 087	0.5087
100 000	50 174	0.50174
⋮	⋮	⋮

Mit einer Computersimulation könnten wir diese Reihe beliebig fortsetzen und wir würden sehen: Mit steigender Anzahl der Versuche stabilisiert sich der Wert der relativen Häufigkeiten. Wie wir es erwartet haben, pendelt er sich bei der angenommenen Wahrscheinlichkeit von 0.5 ein. Das gilt allgemein und wird «Gesetz der grossen Zahlen» genannt. Es besagt: «Die relative Häufigkeit, mit der ein Ergebnis eintritt, nähert sich seiner tatsächlichen Wahrscheinlichkeit immer weiter an, je häufiger das Zufallsexperiment durchgeführt wird.»

Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

Die **Wahrscheinlichkeit** eines Ergebnisses bedeutet: Wiederholt man das Zufallsexperiment sehr oft, so nähert sich die **relative Häufigkeit** dem Wert der Wahrscheinlichkeit an.

Die relative Häufigkeit können wir also dazu verwenden, die **Wahrscheinlichkeit** eines Ergebnisses abzuschätzen. Wir wenden das an dem Beispiel aus der Einstiegsaufgabe an und ordnen mithilfe von $h(\omega)$ jedem Ergebnis ω eine Wahrscheinlichkeit $P(\omega)$ ^[1] zu. Wir erhalten die folgende **Wahrscheinlichkeitsverteilung** in der letzten Zeile der Tabelle:

ω	1	2	3	4	5	6	7
$H(\omega)$	48	89	111	57	73	85	37
$h(\omega)$	0.096	0.178	0.222	0.114	0.146	0.17	0.074
$P(\omega)$	0.10	0.18	0.22	0.11	0.15	0.17	0.07

Wir haben die Wahrscheinlichkeiten gerundet, da die relative Häufigkeit nicht immer genau mit der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit übereinstimmt, insbesondere bei einer kleinen Anzahl von Versuchen.

Wir können nun beispielsweise Folgendes feststellen:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der nächsten Drehung des Glücksrads die «7» kommt, liegt bei 0.07 bzw. bei 7%. Wir schreiben dafür $P(7) = 0.07$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass bei der nächsten Drehung des Glücksrads die «5» kommt, liegt bei 0.15 bzw. bei 15%. Wir schreiben dafür $P(5) = 0.15$.
- Dass die «5» kommt, ist wahrscheinlicher, als dass die «7» kommt, denn $P(5) > P(7)$.
- Dass die «3» kommt, ist von allen Ergebnissen am wahrscheinlichsten. Sie kommt durchschnittlich bei 22% aller Drehungen.

[1] Der Buchstabe «P» kommt von «probability» (engl. für «Wahrscheinlichkeit»).

2.2 Die Wahrscheinlichkeit bei der Verknüpfung von Ereignissen

Wir bleiben beim Glücksrad aus der Einstiegsaufgabe und gehen weiterhin von der Wahrscheinlichkeitsverteilung aus:

ω	1	2	3	4	5	6	7
$P(\omega)$	0.10	0.18	0.22	0.11	0.15	0.17	0.07

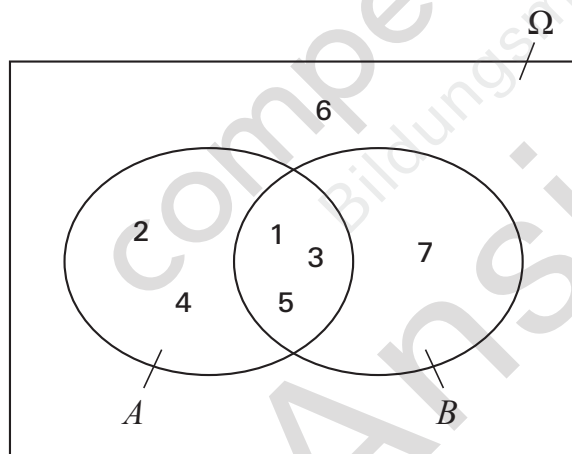
Wir betrachten nun die beiden Ereignisse:

- A «Ergebnis ist kleiner als 6».
- B «Ergebnis ist eine ungerade Zahl».

Beide Ereignisse in Mengenschreibweise sind gegeben durch:

- $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
- $B = \{1; 3; 5; 7\}$

Im **Venn-Diagramm** sehen die Mengen so aus:



Die Wahrscheinlichkeiten von A und B sind jeweils die Summe der Wahrscheinlichkeiten ihrer Ergebnisse:

- $P(A) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) = 0.76$
- $P(B) = P(1) + P(3) + P(5) + P(7) = 0.54$

Wir berechnen im Folgenden die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse:

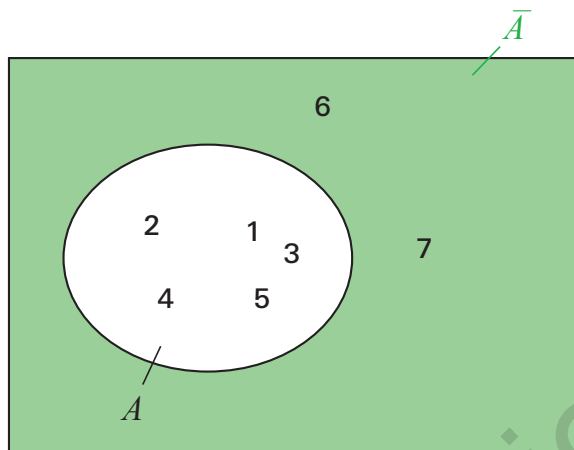
- C «Ergebnis ist **nicht** kleiner als 6».
- D «Ergebnis ist kleiner als 6 **und** eine gerade Zahl».
- E «Ergebnis ist kleiner als 6 **oder** eine gerade Zahl».

Wahrscheinlichkeit bei «nicht»-Ereignissen

Das Ereignis C «Ergebnis ist **nicht** kleiner als 6» ist dann eingetreten, wenn A nicht eingetreten ist. Es beinhaltet also alle Ergebnisse aus der Grundmenge $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, die nicht in A sind. Es handelt sich um das **Gegenereignis** $C = \bar{A}$. Und damit:

$$C = \bar{A} = \{6; 7\}$$

Im Venn-Diagramm entspricht \bar{A} der grünen Fläche:



Wir können die Wahrscheinlichkeit wieder berechnen, indem wir die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ergebnisse addieren:

$$P(\bar{A}) = P(6) + P(7)$$

Da aber die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse aus der Grundmenge zusammen 1 ergeben, können wir auch so rechnen:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.76 = 0.24$$

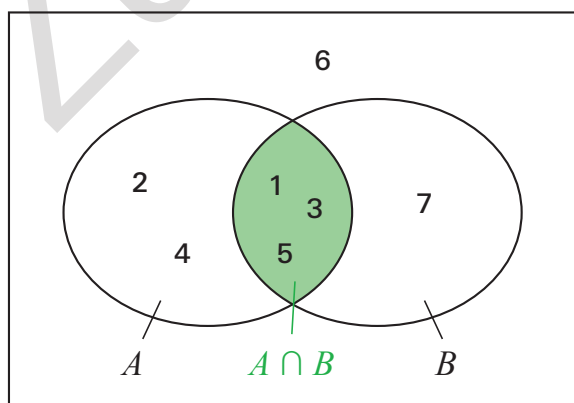
Wir können die Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses \bar{A} immer über die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A berechnen. Da \bar{A} alle Ergebnisse enthält, die nicht zu A gehören, muss die Summenwahrscheinlichkeit 1 sein: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Wahrscheinlichkeit bei «und»-Ereignissen

Das Ereignis D «Ergebnis ist kleiner als 6 **und** ungerade» ist eingetreten, wenn A und B zusammen eingetreten sind. D enthält also genau die Ergebnisse, die in beiden Ereignissen enthalten sind. Es handelt sich um die **Schnittmenge** $D = A \cap B$. Und damit:

$$D = A \cap B = \{1; 3; 5\}$$

Im Venn-Diagramm entspricht $A \cap B$ der grünen Fläche:



Aufgabe 19

28% der Studierenden einer Universität lesen Zeitung A. 18% lesen Zeitung B. 9% lesen beide Zeitungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liest ein zufällig ausgewählter Studierender

- a) nicht die Zeitung A?
- b) mindestens eine der Zeitungen A oder B?
- c) keine der Zeitungen A und B?

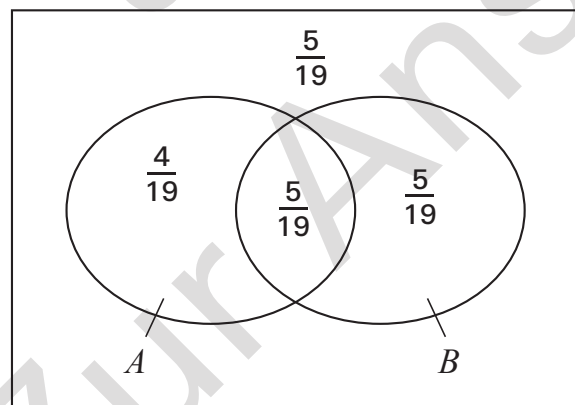
Aufgabe 20

Für Adams gezinkten Würfel betragen die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augenzahlen: $P(1) = \frac{5}{36}$; $P(2) = \frac{1}{9}$; $P(3) = \frac{7}{36}$; $P(4) = \frac{1}{13}$; $P(5) = \frac{7}{36}$ und $P(6) = \frac{1}{4}$.

- a) Warum können diese Wahrscheinlichkeitsangaben so nicht richtig sein? Korrigieren Sie die Wahrscheinlichkeit $P(4)$, sodass man danach mit den Wahrscheinlichkeiten rechnen kann.
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass man mit Adams Würfel beim einmaligen Würfeln ...
 - keine 6 würfelt?
 - eine 5 oder eine 6 würfelt?
 - keine 2 und keine 3 würfelt?
 - eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 würfelt?
 - eine 4 und keine 1 würfelt?
 - eine gerade Zahl würfelt?
 - keine Primzahl würfelt?

Aufgabe 21

Bei einem Zufallsversuch mit den beiden Ereignissen **A** und **B** auf einer Grundergebnismenge Ω sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten im Venn-Diagramm angegeben:



Geben Sie folgende Wahrscheinlichkeiten an:

- $P(A)$
- $P(B)$
- $P(\overline{A})$
- $P(\overline{B})$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cup B)$
- $P(\overline{A \cap B})$
- $P(\overline{A \cup B})$

Beim Würfeln geht es genauso: Die Wahrscheinlichkeit für eine «3» ist genauso gross wie für eine «2» oder für jede andere der 6 Zahlen. Also ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Augenzahl $\frac{1}{6}$:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Solche Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heissen **Laplace-Experimente**^[1].

Laplace-Experiment

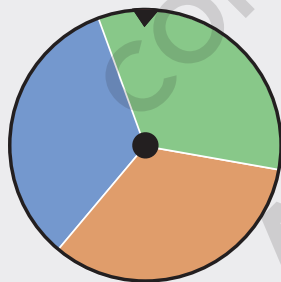
Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse aus der Grundmenge $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$ gleich wahrscheinlich sind, heissen **Laplace-Experimente**.

Hat ein Laplace-Experiment n Ergebnisse, so ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$:

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = P(\omega_3) = \dots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

Beispiele:

Beim kreisrunden Glücksrad



sind alle Segmente mit 120° gleich gross. Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von grün (g), blau (b) und orange (o) sind gleich gross: $P(g) = P(b) = P(o) = \frac{1}{3}$.

In der Lostrommel des Schweizer Zahlenlottos befinden sich die Zahlen 1 bis 42. Die Wahrscheinlichkeiten, mit der ersten Kugel eine bestimmte Zahl zu ziehen, sind alle gleich gross:

$$P(1) = P(2) = P(3) = \dots = P(42) = \frac{1}{42}$$

[1] Benannt nach dem französischen Mathematiker, Physiker und Astronom Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Er war einer der Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

3.2 Ereignisse bei Laplace-Experimenten

Angenommen, wir gewinnen ein Spiel, wenn wir mit einem Würfel «mindestens eine 3» werfen. Dies ist der Fall, wenn das Ereignis $A = \{3; 4; 5; 6\}$ eintritt. Für die Wahrscheinlichkeit von A gilt:

$$P(A) = P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Da hier die Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse gleich gross sind, können wir $P(A)$ auch ohne Addition berechnen. Wir haben 4 «günstige Ergebnisse» für das Eintreten von $A = \{3; 4; 5; 6\}$ von insgesamt 6 «möglichen Ergebnissen» der Grundmenge $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Für die Wahrscheinlichkeit, dass wir das Spiel gewinnen, gilt:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Wir verallgemeinern diesen Zusammenhang:

Wahrscheinlichkeit von Ereignissen bei Laplace-Experimenten

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** A in einem Laplace-Experiment ist die Anzahl der für A **günstigen Ergebnisse** dividiert durch die Gesamtzahl der **möglichen Ergebnisse**:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

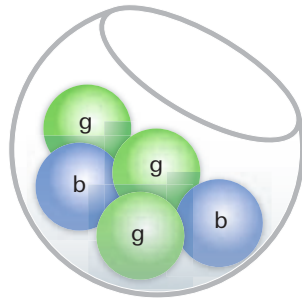
Beispiele:

Wir betrachten das französische Spielblatt mit 32 Karten, das aus vier Farben (Pik, Herz, Karo und Kreuz) und den acht Kartenwerten von 7 bis 10 sowie Bube, Dame, König und Ass besteht. Wenn wir eine Karte aus einem gut gemischten Stapel ziehen, ist jedes Ergebnis gleich wahrscheinlich, es handelt sich also um ein Laplace-Experiment:

- Die Wahrscheinlichkeit, den Herz-Buben zu ziehen, beträgt $\frac{1}{32}$, da es insgesamt 32 Karten gibt.
- Die Wahrscheinlichkeit, eine Herz-Karte zu ziehen, beträgt $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, da es 8 Herz-Karten gibt.
- Die Wahrscheinlichkeit, eine Dame zu ziehen, beträgt $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, da es 4 Damen gibt.
- Die Wahrscheinlichkeit, ein schwarzes Ass zu ziehen, beträgt $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$, da es 2 schwarze (Pik und Kreuz) Asses gibt.

4.1 Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses

Die Situation aus der Einstiegsaufgabe simulieren wir durch folgendes Urnenmodell:



Aus dieser Urne mit 3 grünen und 2 blauen Kugeln werden nacheinander 2 Kugeln **ohne Zurücklegen** gezogen. Das Zufallsexperiment ist zweistufig mit der Grundmenge $\Omega = \{gg, gb, bg, bb\}$.

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeiten für die vier Ergebnisse. Dazu stellen wir das Zufallsexperiment durch ein **Baumdiagramm** grafisch dar. Zuerst die 1. Ziehung:

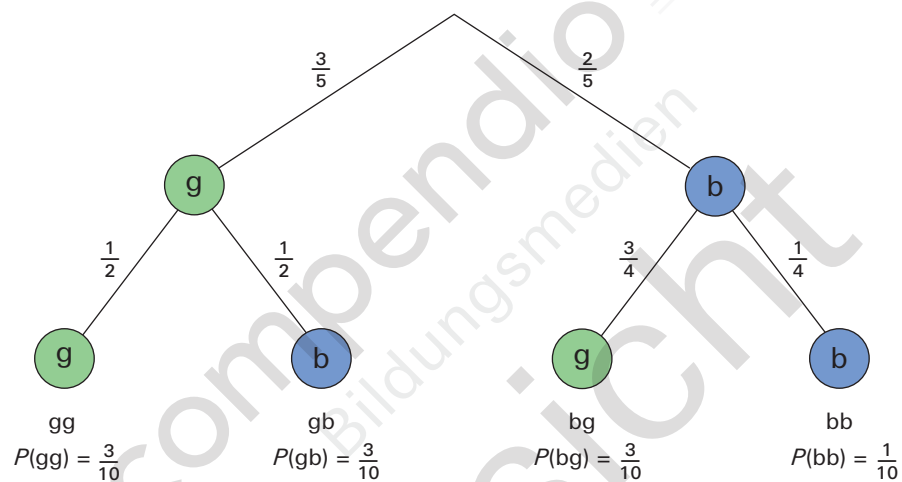


Der Startknoten oben stellt den Beginn des Experiments dar. Von diesem Knoten aus gibt es zwei **Zweige**, die die beiden möglichen Ergebnisse, «g» und «b», der 1. Ziehung symbolisieren. Die Wahrscheinlichkeit für «g» ist $P(g) = \frac{3}{5}$ und für «b» ist sie $P(b) = \frac{2}{5}$. Die Werte werden an die entsprechenden Zweige geschrieben.

Wir berechnen jetzt die Wahrscheinlichkeit jedes Ergebnisses, indem wir die Wahrscheinlichkeiten entlang des jeweiligen Pfads multiplizieren:

- $P(\underline{gg}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$
- $P(\underline{gb}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$
- $P(\underline{bg}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$
- $P(\underline{bb}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

Wir tragen zuletzt diese an den Endpunkten des jeweiligen Pfads ein:

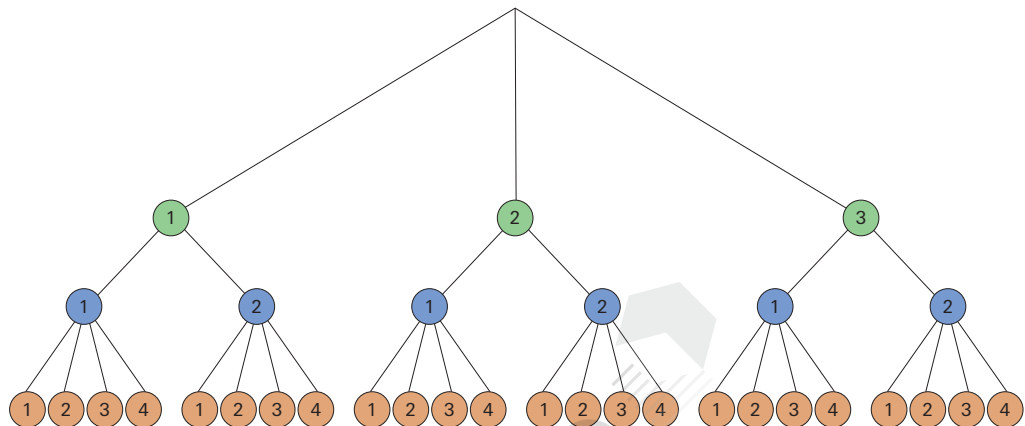


Dass man die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses eines mehrstufigen Zufallsexperiments durch Multiplikation der einzelnen Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfads erhält, gilt allgemein und ist die **Erste Pfadregel**.

Erste Pfadregel

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** eines mehrstufigen Zufallsexperiments erhält man durch **Multiplikation** der einzelnen Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfads im Baumdiagramm.

Das zugehörige 3-stufige Baumdiagramm sieht so aus:



Wir erhalten $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ verschiedene Pfade. Damit gibt es auch 24 verschiedene Ergebnisse, die als Tripel geschrieben werden:

(1;1;1)	(1;1;2)	(1;1;3)	(1;1;4)	(1;2;1)	(1;2;2)	(1;2;3)	(1;2;4)
(2;1;1)	(2;1;2)	(2;1;3)	(2;1;4)	(2;2;1)	(2;2;2)	(2;2;3)	(2;2;4)
(3;1;1)	(3;1;2)	(3;1;3)	(3;1;4)	(3;2;1)	(3;2;2)	(3;2;3)	(3;2;4)

Wir verallgemeinern die Anzahlen der Kugeln in den Urnen: Die erste Urne beinhaltet m_1 Kugeln, die zweite m_2 Kugeln und die dritte m_3 Kugeln. Die Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten (Tripel) erhalten wir auch hier durch Multiplikation: $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$.

Angenommen, wir ziehen nun nacheinander aus 10 Urnen eine Kugel. Die erste Urne beinhaltet m_1 Kugeln, die zweite m_2 Kugeln ... und die zehnte m_{10} Kugeln. Das zugehörige Baumdiagramm ist 10-stufig. Jedes Ergebnis ist als 10-Tupel $(a_1; a_2; \dots; a_{10})$ darstellbar.

Die Anzahl der möglichen Pfade im Baumdiagramm, also die Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten, erhält man durch Multiplikation: $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_{10}$.

Dass die Anzahl aller Möglichkeiten gleich dem Produkt der einzelnen Möglichkeiten ist, ist ein Grundprinzip der Kombinatorik und heisst **Multiplikationsprinzip**. Statt von Urnen und Kugeln spricht man hier allgemein von Mengen und Elementen:

Multiplikationsprinzip

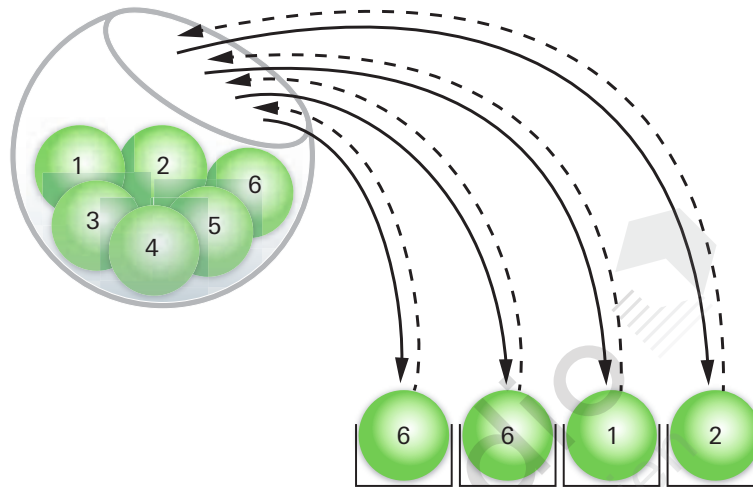
Gegeben seien k Mengen mit $m_1; m_2; \dots; m_k$ Elementen. Wählt man nacheinander aus jeder Menge ein Element aus, so gibt es insgesamt

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$$

Kombinationsmöglichkeiten, ein k -Tupel zu bilden.

5.2 Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen

Aus der abgebildeten Urne mit den Zahlen 1 bis 6 ziehen wir viermal **mit Zurücklegen**:



Wir ziehen eine Kugel, notieren die Zahl und legen die Kugel zurück in die Urne. Auf diese Weise erhalten wir z. B. nacheinander die Zahlen 6, 6, 1 und 2. Das Ergebnis dieses Zufallsexperiments ist somit das 4-Tupel **(6;6;1;2)**. Dieses Ergebnis ist beispielsweise von **(6;1;2;6)** zu unterscheiden, da wir hier die Reihenfolge der gezogenen Zahlen beachten.

Um die Anzahl aller möglichen Ergebnisse zu erhalten, stellen wir uns vor, dass wir nicht viermal aus derselben Urne mit denselben Zahlen ziehen, sondern aus vier verschiedenen Urnen mit den Zahlen 1 bis 6. Nach dem Multiplikationsprinzip gibt es $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$ verschiedene mögliche Ergebnisse (4-Tupel mit Beachtung der Reihenfolge).

Hätten wir 10 Kugeln und würden 5-mal mit Zurücklegen ziehen, so hätten wir $10^5 = 100000$ verschiedene Ergebnisse (5-Tupel mit Beachtung der Reihenfolge). Wir verallgemeinern:

Anzahl der Ergebnisse beim Ziehen mit Zurücklegen

Zieht man aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln nacheinander k Kugeln **mit Zurücklegen**, so sind n^k verschiedene Ergebnisse (k -Tupel mit Beachtung der Reihenfolge) möglich.

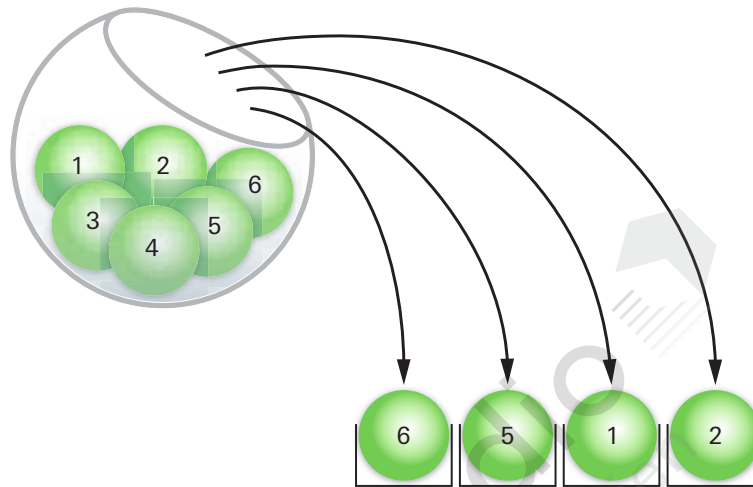
Beispiel:

Auf wie viele Arten kann man aus einem französischen Kartenspiel (32 verschiedene Karten) 5 Karten nacheinander ziehen, wenn die Karten immer wieder zurückgelegt werden?

Wir interpretieren die 32 Karten als Kugeln in einer Urne, die mit den Zahlen 1 bis 32 beschriftet sind, und erhalten folglich $32^5 = 33554432$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

5.3 Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen

Aus der abgebildeten Urne mit den Zahlen 1 bis 6 ziehen wir viermal **ohne Zurücklegen**:



Wir ziehen eine Kugel, notieren die Zahl und legen die Kugel diesmal nicht zurück in die Urne. Auf diese Weise erhalten wir z. B. nacheinander die Zahlen 6, 5, 1 und 2. Das Ergebnis dieses Zufallsexperiments ist somit ein 4-Tupel **(6;5;1;2)**.

Im Gegensatz zum Ziehen mit Zurücklegen ist eine Mehrfachziehung einer Zahl nicht möglich. Die Anzahl der Kugeln verringert sich bei jeder Ziehung um eins. Es gibt in diesem Fall $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ verschiedene mögliche Ergebnisse (4-Tupel mit Beachtung der Reihenfolge).

Hätten wir 11 Kugeln und würden 7-mal mit Zurücklegen ziehen, so hätten wir $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1663200$ verschiedene Ergebnisse (7-Tupel mit Beachtung der Reihenfolge). Wir verallgemeinern:

Anzahl der Ergebnisse beim Ziehen ohne Zurücklegen

Zieht man aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln nacheinander k Kugeln **ohne Zurücklegen** (mit $k \leq n$), so sind $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$ verschiedene Ergebnisse (k-Tupel mit Beachtung der Reihenfolge) möglich.

Beispiel:

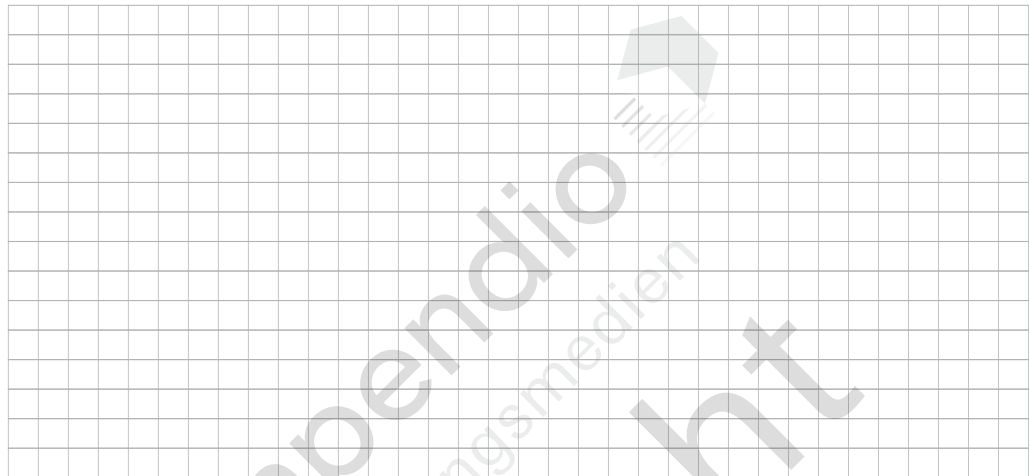
Auf wie viele Arten kann man aus einem französischen Kartenspiel (32 verschiedene Karten) 5 Karten nacheinander ziehen, wenn die Karten nicht zurückgelegt werden?

Wir interpretieren die 32 Karten als Kugeln in einer Urne, die mit den Zahlen 1 bis 32 beschriftet sind, und erhalten folglich $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 24165120$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

Aufgabe 45

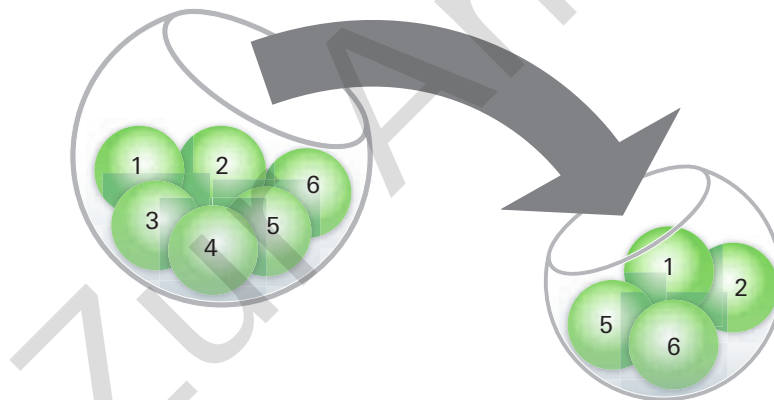
Bei einer elektronischen Schaltung müssen 6 Drähte mit ihren Gegenstücken richtig verbunden werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft ein Handwerker zufällig ...

- alle 6 richtigen Verbindungen?
- genau 5 richtige Verbindungen?
- höchstens 5 richtige Verbindungen?
- mindestens 5 richtige Verbindungen?



5.5 Ziehen aus einer Urne mit einem Griff – der Binomialkoeffizient

Aus der abgebildeten Urne mit den Zahlen 1 bis 6 ziehen wir 4 Kugeln **mit einem Griff**:



Auch diesmal erhalten wir als Ergebnis ein 4-Tupel, z. B. $(6;5;1;2)$. Dieses ist aber von $(1;5;6;2)$ und von allen anderen Permutationen der vier Zahlen 1, 2, 5 und 6 nicht zu unterscheiden, da es keine ausgewiesene Reihenfolge gibt. Wir stellen ein Ergebnis mit diesen vier Zahlen daher immer in aufsteigender Reihenfolge dar: $(1;2;5;6)$.

Um die Anzahl der möglichen Ergebnisse zu ermitteln, erinnern wir uns, dass es beim nacheinander Ziehen ohne Zurücklegen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ verschiedene Ergebnisse (4-Tupel **mit** Beachtung der Reihenfolge) gibt. Da es für 4 verschiedene Zahlen $4! = 12$ Permutationen gibt, müssen wir die obige Anzahl noch durch diese Zahl teilen: Es gibt somit $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4!}$ verschiedene Ergebnisse (4-Tupel **ohne** Beachtung der Reihenfolge).

Aufgabe 41

Wir denken uns eine Urne mit drei Kugeln, die mit den Zahlen 3, 5 und 7 beschriftet sind, und erhalten bei viermaligem Ziehen mit Zurücklegen $3^4 = 81$ verschiedene Kombinationsmöglichkeiten.

Aufgabe 42

Als Urnenmodell nehmen wir eine Urne mit 6 Kugeln, beschriftet von 1 bis 6, bei dreimaligem Ziehen mit Zurücklegen. Es gibt $6^3 = 216$ mögliche Ergebnisse.

- a) Es gibt $5^3 = 125$ günstige Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(A) = \frac{125}{216} \approx 0.579$.
- b) Es handelt sich um das Gegenereignis von A. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{125}{216} \approx 0.421$.
- c) Es gibt $1^3 = 1$ günstige Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(C) = \frac{1}{216} \approx 0.005$.
- d) Es gibt $1 \cdot 6^2 = 36$ günstige Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(D) = \frac{36}{216} \approx 0.167$.
- e) Es gibt $1 \cdot 5^2 = 25$ günstige Ergebnisse. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(E) = \frac{25}{216} \approx 0.116$.
- f) Die 1 kann beim ersten, zweiten oder dritten Wurf fallen. Daher gibt es dreimal so viele günstige Ergebnisse wie bei e): $3 \cdot 25 = 75$. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(F) = \frac{75}{216} \approx 0.347$.

Aufgabe 43

Es gibt $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15600$ mögliche Wörter.

Aufgabe 44

Es gibt insgesamt $37 \cdot 36 \cdot 35 = 46620$ mögliche Kombinationen für die drei Erstplatzierten. Davon ist eine Kombination die richtige Vorhersage. Da wir von einem Laplace-Experiment ausgehen (Gewinnwahrscheinlichkeiten gleich gross), ist die Wahrscheinlichkeit für die richtige Vorhersage $P = \frac{1}{46620} \approx 0.00002$.

Aufgabe 45

Insgesamt gibt es $6! = 720$ mögliche Verbindungen.

- a) Es gibt 1 günstige Verbindung. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(A) = \frac{1}{720} \approx 0.0014$.
- b) Es gibt 6 günstige Verbindungen. Die Wahrscheinlichkeit ist $P(B) = \frac{6}{720} = \frac{1}{120} \approx 0.0083$
- c) Es handelt sich um das Gegenereignis von a). Die Wahrscheinlichkeit ist $P(C) = 1 - P(A) = \frac{719}{720} \approx 0.999$.
- d) Es handelt sich um das Ereignis aus a) oder b). Die Wahrscheinlichkeit ist $P(D) = P(A) + P(B) = \frac{7}{720} \approx 0.0097$.

Aufgabe 46

Wir interpretieren die 7 Bundesräte als von 1 bis 7 nummerierte Kugeln in einer Urne und die Bildung einer Dreierdelegation als Ziehen von dreien dieser Kugeln mit einem Griff. Wir erhalten so für die Anzahl der Dreierdelegationen im Bundesrat: $\binom{7}{3} = 35$.

Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik

Die Lehrmittelreihe VON NULL AUF MATHE vermittelt alle grundlegenden Kompetenzen in Algebra, Analysis, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wirtschaftsmathematik. Sie führt Schritt für Schritt durch die Inhalte und steht Ihnen dabei als Lerncoach zur Seite.

Die Erklärungen beginnen bewusst bei den Grundlagen, um auch Lernenden ohne Vorkenntnisse den Einstieg zu erleichtern. Komplexe Themen werden in kleine, verständliche Einheiten gegliedert, die logisch aufeinander aufbauen. Das Konzept lädt zum aktiven Lernen ein. Sie werden motiviert, Aufgaben zu lösen und Ihren Lernerfolg durch Selbstreflexion zu überprüfen. Diese Arbeitsmethodik, unterstützt durch grafische Elemente, zieht sich wie ein roter Faden durch das gesamte Werk. In kleinen Schritten bauen Sie Ihr Wissen nachhaltig auf und schaffen so ein stabiles Fundament für Ihren Erfolg in Schule, Studium, Beruf und Alltag.

VON NULL AUF MATHE eignet sich ideal zum Selbstlernen, kann aber auch im Unterricht und in der Nachhilfe eingesetzt werden. Jeder Band ist in sich abgeschlossen und ermöglicht das gezielte Wiederholen oder Vertiefen einzelner Themen.

Die Reihe VON NULL AUF MATHE umfasst die folgenden elf Bände:

- Die Grundlagen des Rechnens: Zahlen, Brüche, Prozente und Potenzen
- Rechnen mit Buchstaben: Terme und Bruchterme
- Auf geradem Weg: lineare Gleichungen und Funktionen
- Im Bogen zum Ziel: quadratische Gleichungen und Funktionen
- Gemeinsame Lösungen: lineare Gleichungssysteme
- Das Prinzip der Zuordnung: Einführung in die Funktionen
- Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome
- Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Grundlagen der Statistik: Daten, Diagramme, Kennzahlen und Zusammenhänge
- **Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik**
- Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung

Compendio Bildungsmedien
www.compendio.ch

ISBN 978-3-7155-0137-6



CHRISTOPH GERBER Dr. phil. nat., Lehrdiplom für Maturitätsschulen
Studium der Mathematik, Astronomie und Philosophie an der Universität Bern. Unterrichtete mehrere Jahre Mathematik am Gymnasium. Langjähriger Dozent für die Fachausbildung Mathematik am Sekundarlehramt der Universität und der Pädagogischen Hochschule Bern.

PETER JANKOVICS Dipl.-Math.
Studium der Mathematik und Physik an der TU Berlin. Danach Lehrbeauftragter an der Hamburger Fern-Hochschule. Als Autor, Lektor und Redaktor für zahlreiche Verlage im Bildungssektor tätig, seit 2018 für Compendio Bildungsmedien.