

VON NULL AUF MATHE

Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen

**Blick
ins Buch**



ROMAN OBERHOLZER, PETER JANKOVICS

Exponentialgleichung
Wachstum und Zerfall
Wachstumsgleichung
Zinsen und Preisentwicklung
Exponentialfunktionen
Graph strecken und spiegeln
Sättigungsprozesse
Logarithmus
Rechnen mit Logarithmen
Logarithmusfunktionen
Logarithmusgleichungen



VON NULL AUF MATHE

Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen

ROMAN OBERHOLZER, PETER JANKOVICS

compendio
Bildungsmedien
Zur Ansicht

VON NULL AUF MATHE

Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen
Roman Oberholzer, Peter Jankovics

Copyright © 2025, Compendio Bildungsmedien AG, Zürich

Satz: Reemers Publishing Services GmbH, Krefeld
Grafisches Konzept: icona basel gmbh
Coverbild: © Stefan Schmitz, Hamburg
Druck: Edubook AG, Merenschwand
Redaktion und didaktische Bearbeitung: Peter Jankovics

Printausgabe
ISBN: 978-3-7155-0141-3
Artikelnummer: 19533
Auflage: 1. Auflage 2025
Ausgabe: 01N25
Sprache: DE
XMA 508

E-Book-Ausgabe
ISBN: 978-3-7155-0142-0
Artikelnummer: E-19534
Auflage: 1. Auflage 2025
Ausgabe: 01N25
Sprache: DE
XMA 508

Compendio Bildungsmedien AG
Neunbrunnenstrasse 50
CH-8050 Zürich
Tel. +41 44 368 21 11
info@compendio.ch
www.compendio.ch

Alle Rechte, insbesondere die Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten. Der Inhalt des vorliegenden Lehrmittels ist nach dem Urheberrechtsgesetz eine geistige Schöpfung und damit geschützt.



Compendio Bildungsmedien AG unterstützt die Kampagne
«share fair»: www.share-fair.ch

Die Nutzung des Inhalts für den Unterricht ist nach Gesetz an strenge Regeln gebunden. Aus veröffentlichten Lehrmitteln dürfen bloss Ausschnitte, nicht aber ganze Kapitel oder gar das ganze Lehrmittel kopiert, digital gespeichert in internen Netzwerken der Schule für den Unterricht in der Klasse als Information und Dokumentation verwendet werden. Die Weitergabe von Ausschnitten an Dritte ausserhalb dieses Kreises ist untersagt, verletzt Rechte der Urheber und Urheberinnen sowie des Verlags und wird geahndet.

Die ganze oder teilweise Weitergabe des Werks ausserhalb des Unterrichts in kopierter, digital gespeicherter oder anderer Form ohne schriftliche Einwilligung von Compendio Bildungsmedien AG ist untersagt.

In diesem Lehrmittel sind Links auf Websites von Drittanbietern angegeben. Inhalte dieser externen Websites geben nicht die Haltung von Compendio wieder und Compendio übernimmt für diese keine Gewähr, insbesondere hinsichtlich Rechtmässigkeit, inhaltlicher Richtigkeit, Aktualität, Zuverlässigkeit oder Vollständigkeit der verlinkten Inhalte. Die Datenschutzvorkehrungen auf den verlinkten externen Websites obliegen dem Drittanbieter. Bitte informieren Sie sich über den Datenschutz direkt auf diesen Websites.

Die Printausgabe dieses Buchs ist klimaneutral in der Schweiz gedruckt worden. Die Druckerei Edubook AG hat sich einer Klimaprüfung unterzogen, die primär die Vermeidung und Reduzierung des CO₂-Ausstosses verfolgt. Verbleibende Emissionen kompensiert das Unternehmen durch den Erwerb von CO₂-Zertifikaten eines Schweizer Klimaschutzprojekts. Mehr zum Umweltbekenntnis von Compendio Bildungsmedien finden Sie unter: www.compendio.ch/Umwelt

Inhaltsverzeichnis

Aufbau und Methodik des Lehrmittels	5
Vorwissen und Lernziele	7
1 Was ist eine Exponentialgleichung?	8
1.1 Exponentialgleichungen	8
1.2 Gleichungen mittels Exponentenvergleich lösen	9
1.3 Terme auf Potenzen mit gleicher Basis umformen	10
1.4 Übungsaufgaben	12
2 Wie werden Gleichungen für Wachstumsvorgänge aufgestellt?	13
2.1 Lineares und exponentielles Wachstum	14
2.2 Änderungsrate ist nicht gleich Änderungsfaktor	16
2.3 Aufstellen der Wachstumsgleichung	18
2.4 Übungsaufgaben	19
3 Wie werden die Grössen aus der Wachstumsgleichung berechnet?	20
3.1 Potenz- und Exponentialgleichung bei exponentiellem Wachstum	21
3.2 Wachstumsgleichungen bei der Zinseszinsrechnung und der Preisentwicklung	25
3.3 Übungsaufgaben	27
4 Was ist eine Exponentialfunktion?	28
4.1 Exponentialfunktionen	29
4.2 Exponentialfunktionen mit Basis grösser als 1	30
4.3 Exponentialfunktionen mit Basis zwischen 0 und 1	31
4.4 Eigenschaften von Exponentialfunktionen	32
4.5 Die natürliche Exponentialfunktion	34
4.6 Übungsaufgaben	35
5 Wie sieht der Graph einer allgemeinen Exponentialfunktion aus?	36
5.1 Strecken und Stauchen des Graphen	37
5.2 Spiegeln des Graphen	38
5.3 Vertikales Verschieben des Graphen	39
5.4 Der Graph einer allgemeinen Exponentialfunktion	39
5.5 Übungsaufgaben	42
6 Wie lassen sich Wachstumsprozesse durch Exponentialfunktionen modellieren?	45
6.1 Wachstums- und Zerfallsfunktion	46
6.2 Sättigungsprozesse	47
6.3 Übungsaufgaben	51
7 Wie rechnet man mit Logarithmen?	52
7.1 Der Logarithmus	52
7.2 Spezielle Logarithmen	55
7.3 Rechenregeln für Logarithmen	56
7.4 Basiswechsel	58
7.5 Übungsaufgaben	60

8	Wie löst man Exponentialgleichungen durch Logarithmieren?	61
8.1	Exponentialgleichungen durch Logarithmieren umwandeln	61
8.2	Allgemeine Exponentialgleichungen lösen	63
8.3	Übungsaufgaben	66
9	Bei welchen Textaufgaben ist eine Exponentialgleichung zu lösen?	67
9.1	Lösen von Exponentialgleichungen bei Populationswachstum	67
9.2	Lösen von Exponentialgleichungen bei der Zinseszinsrechnung und der Preisentwicklung	68
9.3	Übungsaufgaben	71
10	Was ist eine Logarithmusfunktion?	72
10.1	Die Logarithmusfunktion	72
10.2	Der Graph der Logarithmusfunktion	73
10.3	Die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion	76
10.4	Übungsaufgaben	80
11	Wie werden Logarithmusgleichungen gelöst?	81
11.1	Logarithmusgleichung	81
11.2	Logarithmusgleichungen lösen	82
11.3	Übungsaufgaben	85
12	Lernkontrolle – vermischte Aufgaben	86
	Zusammenfassung	90
	Lösungen zu den Aufgaben	96
	Stichwortverzeichnis	133

Vorwissen und Lernziele

Vorwissen

Erforderliches Vorwissen für «Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen»:

- Rechenoperationen
- Potenzen, Wurzeln, Logarithmen
- Rechnen mit Termen
- Einführung in die Funktionen
- Lineare Gleichungen und Funktionen
- Quadratische Gleichungen und Funktionen
- Potenz- und Wurzelfunktionen

Lernziele

Nach der Bearbeitung dieses Lehrmittels ...

- wissen Sie, was eine Exponentialgleichung ist.
- wissen Sie, wann man eine Exponentialgleichung durch Exponentenvergleich lösen kann.
- können Sie zwischen linearen und exponentiellem Wachstum unterscheiden.
- können Sie aus einem Sachzusammenhang eine Wachstumsgleichung aufstellen.
- wissen Sie, was eine Exponentialfunktion ist und wie ihr Graph aussieht.
- kennen Sie die Eigenschaften von Exponentialfunktionen.
- können Sie Exponentialfunktionen strecken, stauchen, spiegeln und verschieben.
- wissen Sie, wie man Wachstumsprozesse durch Exponentialfunktionen modellieren kann.
- wissen Sie, was ein Sättigungsprozess ist.
- wissen Sie, was ein Logarithmus ist, und können mit ihm rechnen.
- können Sie eine Exponentialgleichung durch Logarithmieren lösen.
- können Sie bei Anwendungen, wie der Zinseszinsrechnung, der Preisentwicklung oder einem Populationswachstum, Exponentialgleichungen aufstellen und lösen.
- wissen Sie, was eine Logarithmusfunktion ist und wie ihr Graph aussieht.
- kennen Sie die Eigenschaften von Logarithmusfunktionen.
- können Sie Logarithmusgleichungen lösen.

2 Wie werden Gleichungen für Wachstumsvorgänge aufgestellt?

Aufgabe 7

Im Jahre 2000 gab es in den Urner Alpen nur noch 120 Schneehühner. Dank eingeleiteter Schutzmassnahmen nahm der Bestand an Schneehühnern aber erfreulicherweise wieder zu. Beantworten Sie die folgenden Fragen unter der Annahme, dass der Bestand an Schneehühnern jährlich um 7% wächst.

- Mit welchem Faktor a kann der Bestand von 2000 multipliziert werden, um auf den Bestand von 2001 zu kommen?
- Wie viele Schneehühner gab es 2001 und wie viele 2002? Runden Sie auf ganze Zahlen.
- Tragen Sie den Bestand an Schneehühnern in die Tabelle ein. Runden Sie Ihre Eintragungen auf ganze Zahlen, rechnen Sie aber mit den exakten Werten weiter.

Jahr	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
Bestand	120								

- Wie lässt sich der Bestand an Schneehühnern nach 30 Jahren, also im Jahr 2030, berechnen?
- Wie lässt sich der Bestand nach n Jahren berechnen?

Exponentielles Wachstum

Angenommen der Bestand wächst jedes Jahr um 7%:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	120	128	137	147	157	168	180	193	206
Änderung		$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$	$\cdot 1.07$

Man erhält den jeweiligen Bestand, indem man den Vorjahresbestand mit dem konstanten Faktor 1.07 multipliziert. Der Bestand B_n nach n Jahren errechnet sich durch:

$$B_n = 120 \cdot \underbrace{1.07 \cdot 1.07 \cdot \dots \cdot 1.07}_{n\text{-mal}} = 120 \cdot 1.07^n$$

Es handelt sich hier um **exponentielles Wachstum**. Dabei ist die Zahl 1.07 der **konstante Änderungsfaktor** und die Zahl 120 der **Anfangsbestand** zum Zeitpunkt $n = 0$.

Allgemein wird exponentielles Wachstum durch die Gleichung

$$B_n = B_0 \cdot a^n$$

beschrieben mit dem konstanten Änderungsfaktor a und dem Anfangswert B_0 .

Der Änderungsfaktor a ist bei exponentiellen Prozessen stets positiv, kann aber auch kleiner als 1 sein. In diesem Fall nimmt der Bestand jährlich ab. Zum Beispiel halbiert sich der Bestand jährlich bei $a = 0.5$. Nimmt ein Bestand mit der Zeit exponentiell ab, so spricht man auch von **exponentiellem Zerfall**.

Exponentielles Wachstum und exponentieller Zerfall

Ein Bestand B verändert sich pro Zeiteinheit **exponentiell**, wenn sie in gleichen Zeitabständen um denselben konstanten Faktor $a > 0$ wächst oder abnimmt. Der Bestand B_n nach n Zeiteinheiten errechnet sich durch:

$$B_n = B_0 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} = B_0 \cdot a^n$$

a ist der konstante **Änderungsfaktor** und B_0 ist der **Anfangswert** zum Zeitpunkt $n = 0$.

Exponentielles Wachstum: Ist $a > 1$, so nimmt der Bestand mit der Zeit zu.

Exponentieller Zerfall: Ist $0 < a < 1$, so nimmt der Bestand mit der Zeit ab.

Beispiele:

Ein Kilogramm Kartoffeln kostet 3.20 Franken. Die folgende Tabelle zeigt den Preis pro Kilogramm Kartoffeln:

Menge (kg)	0	1	2	3	4	5	6
Preis (CHF)	0	3.20	6.40	9.60	12.80	16.00	19.20

In der Tabelle steigt der Preis pro einer Einheit (kg) immer um einen konstanten Betrag (3.20 CHF). Es handelt sich hier um lineares Wachstum.

3.2 Wachstumsgleichungen bei der Zinseszinsrechnung und der Preisentwicklung

Ein typisches Beispiel für exponentielles Wachstum ist die Zinseszinsrechnung. Die Formel für die Zinseszinsrechnung lautet:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Dabei ist K_n das Kapital nach n Jahren, K_0 das Anfangskapital, p der Zinssatz und n die Anzahl Jahre der Verzinsung mit Zinseszins.

Beispiele:

Selina hat heute bei ihrer Genossenschaftsbank Heliomoney 12000 Franken auf einem Sparkonto, das innerhalb von 8 Jahren mit Zinseszins auf 12739.19 Franken wachsen wird.

Welchen Zinssatz bietet die Bank Heliomoney für die kommenden 8 Jahre auf dem Sparkonto an?

Lösung: Aus dem Text ergibt sich die Potenzgleichung:

$$12739.19 = 12000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8$$

die wir wie folgt nach p auflösen:

$$12739.19 = 12000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8 \quad | :12000$$

$$1.061599167 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^8 \quad | \sqrt[8]{}$$

$$\sqrt[8]{1.061599167} = 1 + \frac{p}{100} \quad | -1$$

$$0.007500038 = \frac{p}{100} \quad | \cdot 100$$

$$0.75 = p$$

Der Zinssatz beträgt 0.75%.

Selina aus dem obigen Beispiel belässt ihr Geld weitere 7 Jahre (also insgesamt 15 Jahre) auf ihrem Konto bei einem Zinssatz von 0.75%. Sie will davon eine neue Inneneinrichtung im Wert von 14000 Franken kaufen. Reicht das Geld auf ihrem Sparkonto dafür?

Lösung: Wir können K_{15} direkt berechnen:

$$K_{15} = 12000 \cdot \left(1 + \frac{0.75}{100}\right)^{15} = 12000 \cdot 1.0075^{15} = 13423.23$$

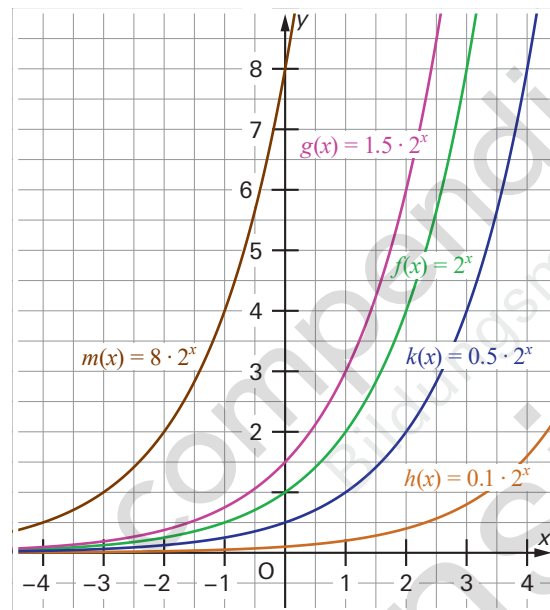
Das ist weniger als 14000. Ihr Kapital auf dem Sparkonto reicht nicht für die Inneneinrichtung.

5.1 Strecken und Stauchen des Graphen

In der Einstiegsaufgabe sind wir der Funktion $g(x) = 1.5 \cdot 2^x$ begegnet. Diese Funktion unterscheidet sich von der Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ um den Faktor $b = 1.5$. Daher sind die Funktionswerte von g überall 1.5-fach so gross wie von f . Der Graph von g ist somit gegenüber dem von f um den Faktor $b = 1.5$ in y -Richtung **gestreckt**. Insbesondere schneidet g die y -Achse im Punkt $(0|1.5)$ und nicht in $(0|1)$.

Bei der Funktion $k(x) = 0.5 \cdot 2^x$ sind die Funktionswerte überall halb so gross wie von f . Der Graph von k ist somit gegenüber dem von f um den Faktor $b = 0.5$ in y -Richtung **gestaucht**, er schneidet die y -Achse im Punkt $(0|0.5)$.

Wir betrachten noch andere Graphen von Funktionen der Form $g(x) = b \cdot 2^x$:

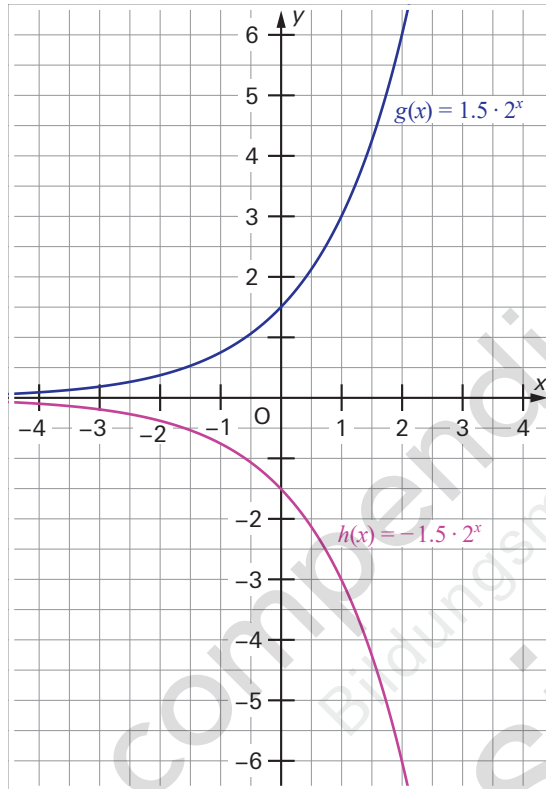


Wir erkennen, dass für den Graphen einer Funktion der Form $g(x) = b \cdot 2^x$ Folgendes gilt:

- Der Graph schneidet die y -Achse im Punkt $(0|b)$.
- Ist $b > 1$, so ist der Graph von g gegenüber dem Graphen von $f(x) = 2^x$ in y -Richtung **gestreckt**.
- Ist $0 < b < 1$, so ist der Graph von g gegenüber dem Graphen von $f(x) = 2^x$ in y -Richtung **gestaucht**.

5.2 Spiegeln des Graphen

Wir untersuchen nun, wie sich ein negativer Vorfaktor b auswirkt. In der Einstiegsaufgabe haben wir eine Wertetabelle für die Funktion $h(x) = -1.5 \cdot 2^x$ aufgestellt. Wir vergleichen den Graphen dieser Funktion mit dem Graphen der Funktion $g(x) = 1.5 \cdot 2^x$:



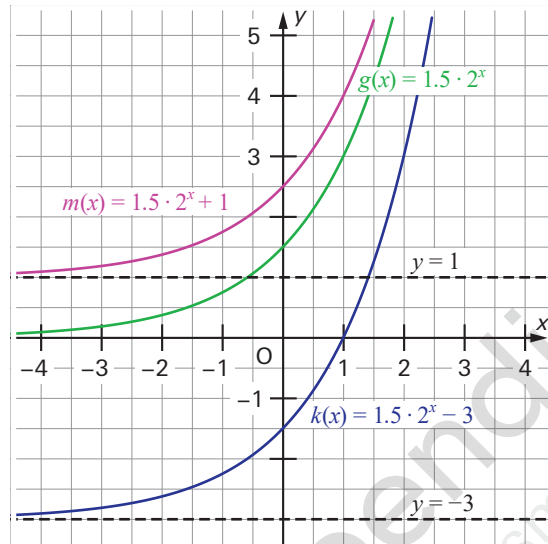
Da die Funktionswerte von h immer die negativen Werte von g sind, ist der Graph von h der an der x-Achse gespiegelte Graph von g .

Da das allgemein gilt, halten wir fest:

- Der Graph der Funktion $h(x) = -b \cdot 2^x$ ist der an der x-Achse gespiegelte Graph von $g(x) = b \cdot 2^x$ und umgekehrt.

5.3 Vertikales Verschieben des Graphen

Wollen wir den Graphen von $g(x) = 1.5 \cdot 2^x$ um 3 Einheiten vertikal nach unten verschieben, so addieren wir die Konstante $c = -3$ und erhalten die Funktion $k(x) = 1.5 \cdot 2^x - 3$. Verschieben wir ihn nach oben um 1 Einheit, erhalten wir $m(x) = 1.5 \cdot 2^x + 1$:



Wir sehen, die verschobenen Graphen schneiden die y -Achse nicht mehr im Punkt $(0|1.5)$, sondern in $(0|-1.5)$ bzw. $(0|2.5)$. Ausserdem schmiegen sich die Graphen nicht mehr der x -Achse (der Geraden $y = 0$) an, sondern der waagrechten (gestrichelten) Geraden $y = -3$ bzw. $y = 1$.

Das gilt für alle Funktionen $k(x) = b \cdot 2^x + c$:

- Der Graph der Funktion $k(x) = b \cdot 2^x + c$ entsteht aus der Verschiebung von $g(x) = b \cdot 2^x$ um c Einheiten in y -Richtung. Für $c > 0$ erfolgt die Verschiebung nach oben, für $c < 0$ nach unten.
- Der Graph schneidet die y -Achse im Punkt $P(0|b + c)$.
- Die Asymptote des Graphen ist die Gerade $y = c$.

5.4 Der Graph einer allgemeinen Exponentialfunktion

Wir haben Funktionen der Form $g(x) = b \cdot 2^x + c$ betrachtet und können festhalten: Den Graphen von $g(x) = b \cdot 2^x + c$ erhält man aus $f(x) = 2^x$ wie folgt:

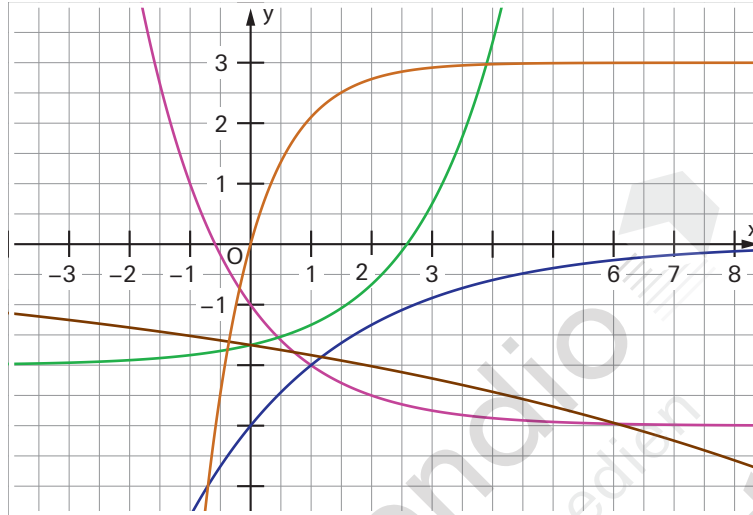
1. Der Graph von g ist um den Faktor $|b|$ gestreckt (falls $|b| > 1$) bzw. gestaucht (falls $|b| < 1$).
2. Ist b negativ, so ist der Graph an der x -Achse gespiegelt.
3. Der Graph ist um c Einheiten nach oben ($c > 0$) bzw. nach unten ($c < 0$) verschoben.

Diese Tatsachen gelten nicht nur für Exponentialfunktionen mit Basis 2, sondern für alle Exponentialfunktionen $f(x) = b \cdot a^x + c$.

Aufgabe 31

Ordnen Sie die Funktionsgleichungen $f(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x - 2$, $g(x) = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$,

$h(x) = 2 \cdot 0.5^x - 3$, $k(x) = -3 \cdot 0.3^x + 3$ und $m(x) = -\frac{5}{3} \cdot 1.1^x$ den abgebildeten Graphen zu.



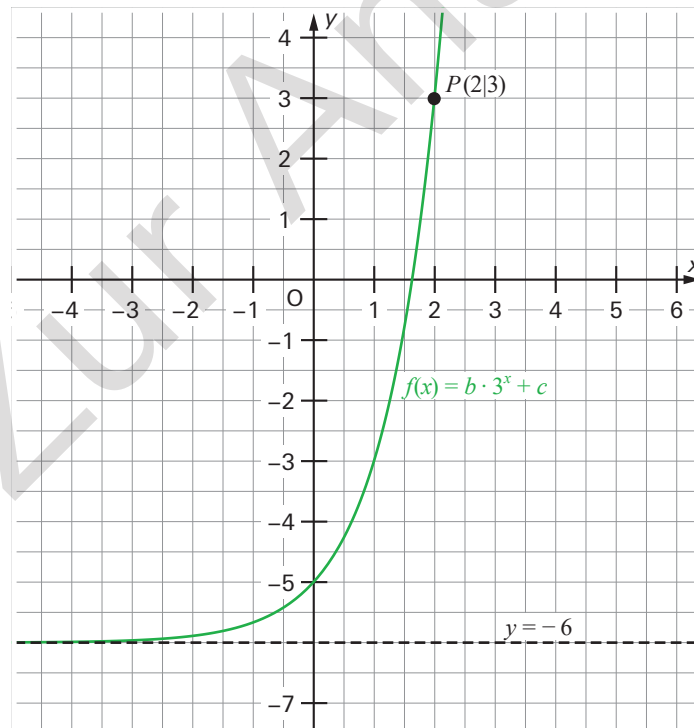
Aufgabe 32

Der Graph einer Funktion f verläuft durch die Punkte $A(0|12)$ und $B(1|4)$. Ferner nähert er sich für wachsende x -Werte der x -Achse an. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $f(x) = b \cdot a^x + c$.

Aufgabe 33

Bestimmen Sie anhand des Graphen die fehlenden Werte (Parameter) in der Funktionsgleichung $f(x) = b \cdot a^x + c$.

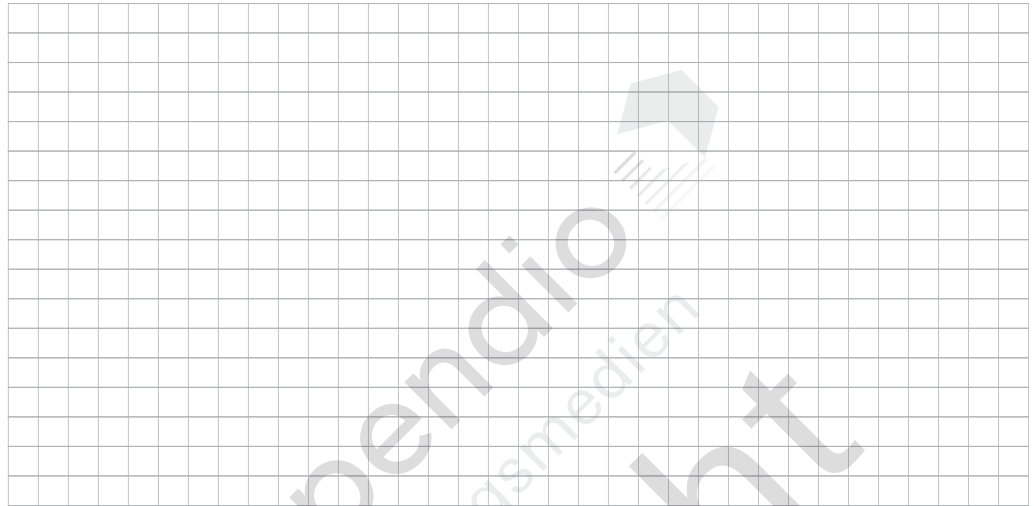
a)



Aufgabe 71

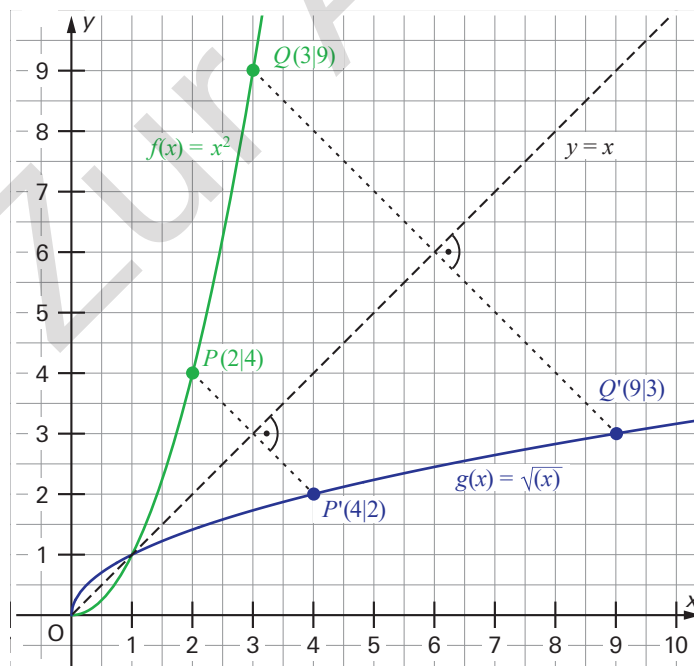
Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

- Der Graph der Funktion $f(x) = \log_a(x)$ geht durch den Punkt $P(1|a)$.
- Die Funktionswerte einer Logarithmusfunktion ist immer positiv, da der Logarithmus nur für positive Zahlen definiert ist.
- Die Graphen der Funktionen $f(x) = \log_a(x)$ und $g(x) = \log_a(x+1)$ schneiden sich nie.



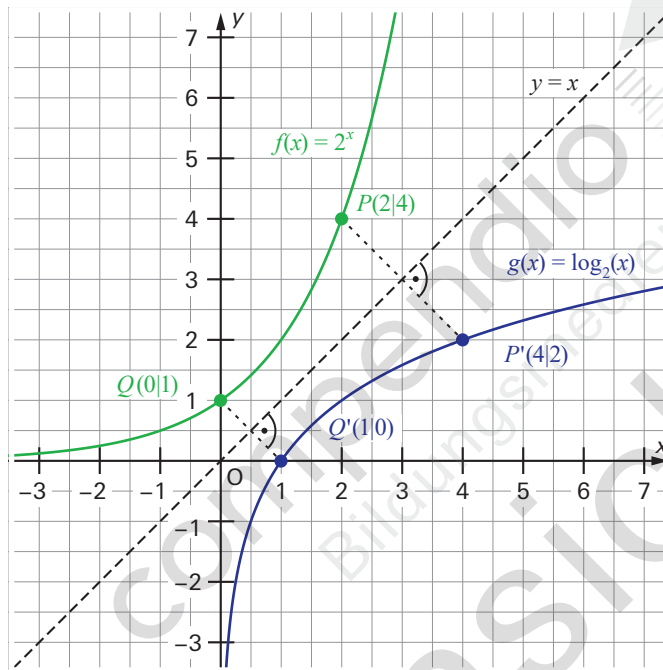
10.3 Die Logarithmusfunktion als Umkehrung der Exponentialfunktion

Quadrieren wir die Zahl 2, so erhalten wir $2^2 = 4$. Durch Wurzelziehen können wir diese Operation wieder rückgängig machen: $\sqrt{4} = 2$. Daher ist für $x \geq 0$ die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ die **Umkehrfunktion** der quadratischen Funktion $f(x) = x^2$. Betrachten wir die Graphen beider Funktionen, so sehen wir: Spiegelt man den Graphen von f an der ersten Winkelhalbierenden, der Geraden $y = x$, so erhält man den Graphen von g .



Die Punkte $P(2|4)$ und $P'(4|2)$ sind Spiegelpunkte mit umgedrehten Koordinaten, da $f(2) = 2^2 = 4$ und $g(4) = \sqrt{4} = 2$ gilt. Und auch die Punkte $Q(3|9)$ und $Q'(9|3)$ liegen auf den jeweiligen Graphen, sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt und haben daher umgedrehte Koordinaten.

Für die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ und die Logarithmusfunktion $g(x) = \log_2(x)$ gilt dasselbe: $f(2) = 2^2 = 4$ und $g(4) = \log_2(4) = 2$. Das heisst, der Punkt $P(2|4)$ liegt auf f und $P'(4|2)$ auf g . Auch $Q(0|1)$ und $Q'(1|0)$ liegen auf den Graphen und sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt:



Die Exponentialfunktion $f(x) = 2^x$ und die Logarithmusfunktion $g(x) = \log_2(x)$ sind also Umkehrfunktionen zueinander. Dieser Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktionen gilt nicht nur für die Basis 2, sondern für alle Basen a :

Exponential- und Logarithmusfunktion sind Umkehrfunktionen

Die Logarithmusfunktion zur Basis a

$$g(x) = \log_a(x)$$

ist die **Umkehrfunktion** der Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x$$

zur Basis a .

Die Graphen von f und g gehen durch Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden, der Geraden $y = x$, auseinander hervor.

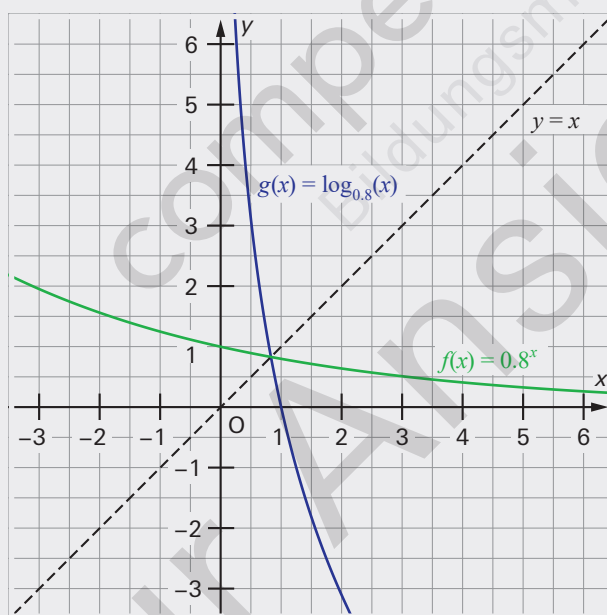
Somit lassen sich sehr schnell die Kenntnisse über den Graphen der Logarithmusfunktion aus dem Graphen der Exponentialfunktion gewinnen:

	Exponentialfunktion $f(x) = a^x$	Logarithmusfunktion $g(x) = \log_a(x)$
Schnitt mit den Achsen	y-Achse im Punkt $P(0 1)$	x-Achse im Punkt $P(1 0)$
falls $a > 1$	steigender Graph	steigender Graph
falls $0 < a < 1$	fallender Graph	fallender Graph
Definitionsbereich	alle reellen Zahlen	nur positive Zahlen
Wertebereich	nur positive Zahlen	alle reellen Zahlen
Asymptote	x-Achse	y-Achse

Wir sehen, dass sich die Eigenschaften der Graphen der beiden Funktionen durch Spiegelung an $y = x$ vererben.

Beispiel:

Wir zeigen einen Fall, in dem die Basis kleiner als 1 ist. Abgebildet sind der Graph von $f(x) = 0.8^x$ und der seiner Umkehrfunktion $g(x) = \log_{0.8}(x)$:



Wir sehen, die Graphen gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden hervor. Beide Funktionen sind monoton fallend.

11 Wie werden Logarithmusgleichungen gelöst?

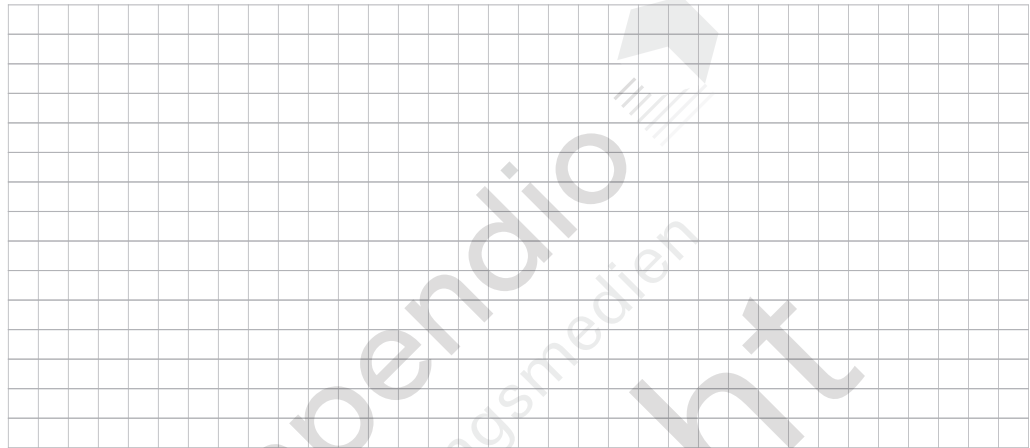
Aufgabe 78

Lösen Sie die Gleichungen.

a) $\log_3(x) = 8$

b) $\log_3(x - 1) = 8$

c) $\log_3(x - 1) = \log_3(4)$



11.1 Logarithmusgleichung

In der Einstiegsaufgabe sind wir den Gleichungen $\log_3(x) = 8$ und $\log_3(x - 1) = \log_3(4)$ begegnet. In beiden Gleichungen kommt die Unbekannte x im **Argument**^[1] eines Logarithmus vor. Solche Gleichungen heißen **Logarithmusgleichungen**.

Logarithmusgleichung

Kommt in einer Gleichung die Unbekannte im Argument eines Logarithmus vor, so handelt es sich um eine **Logarithmusgleichung**.

Wichtig ist zu beachten, dass der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist und somit die Definitionsmenge einer Logarithmusgleichung eingeschränkt ist.

Beispiele:

Für die Logarithmusgleichung $3 \cdot \log_3(2x - 1) = \log_3(4)$ muss $2x - 1 > 0$ erfüllt sein. Daraus folgt $x > 0.5$ und die Definitionsmenge $D =]0.5; \infty[$.

Für die Logarithmusgleichung $\log_3(2x - 3) = \log_3(6x - 6)$ muss $2x - 3 > 0$ und $6x - 6 > 0$ erfüllt sein. Daraus folgt $x > 1.5$ und $x > 1$. Für die Definitionsmenge folgt $D =]1.5; \infty[$.

[1] Das **Argument** eines Logarithmus ist der Term, der in der Klammer steht.

- b) Wir müssen die Exponentialgleichung $1 = 16384 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ lösen:

$$1 = 16384 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad |:16384$$

$$\frac{1}{16384} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad |TU$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^7 = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad |\text{Exponentenvergleich}$$

$$7 = n$$

In der 7. Woche ist noch 1 m^2 algenfrei.

- c) Sind 90% des Sees mit Algen bedeckt, heisst dies, dass 10% noch unbedeckt sind.

Dies führt auf die Gleichung $1638.4 = 16384 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$:

$$1638.4 = 16384 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad |:16384$$

$$\frac{1}{10} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Da $\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{1}{4} > \frac{1}{10}$ und $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$, folgt, dass ab der 2. Woche weniger als 10% unbedeckt sind, also mehr als 90% des Weihers mit Algen bedeckt sind.

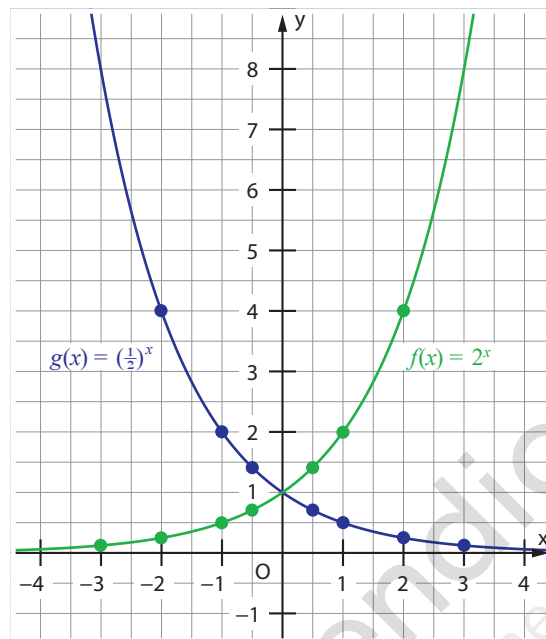
Aufgabe 22

- a)

x	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x) = 2^x$	0.125	0.25	0.5	0.71	1	1.41	2	4	8
$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1.41	1	0.71	0.5	0.25	0.125

Zur Ansicht

- b) Aus den Punkten der Wertetabelle ergeben sich folgende Graphen:



- c) $f(x) = 2^x$ ist monoton steigend und $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ist monoton fallend.
 d) Beide Graphen gehen durch den Punkt $P(0|1)$.
 e) Die beiden Graphen sind zueinander achsensymmetrisch bezüglich der y -Achse.

Aufgabe 23

- a) Dies ist offensichtlich eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ mit $a = 3$.
 b) Dies ist keine Exponentialfunktion, da die Basis keine konstante Zahl ist. Die Unbekannte x steht in der Basis und nicht im Exponenten.
 c) Dies ist keine Exponentialfunktion, da die Basis x keine konstante Zahl ist.
 d) Dies ist eine Exponentialfunktion, da sie wie folgt umgeformt werden kann: $f(x) = \frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.
 e) Dies ist eine Exponentialfunktion, da die Funktionsgleichung wie folgt umgeformt werden kann: $f(x) = \frac{1}{5^{-2x}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2x} = 5^{2x} = (5^2)^x = 25^x$.

Aufgabe 24

<input type="checkbox"/>	Für $x = -1$ ist die Funktion f nicht definiert.
<input checked="" type="checkbox"/>	Der Graph von f geht durch den Punkt $(0 1)$.
<input checked="" type="checkbox"/>	Der Graph von f geht durch den Punkt $(1 a)$.
<input checked="" type="checkbox"/>	Ist $a = -2$, dann ist f keine Exponentialfunktion.
<input checked="" type="checkbox"/>	Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2$.
<input type="checkbox"/>	Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = -2$.
<input checked="" type="checkbox"/>	Die Funktion mit Basis $a = \frac{4}{3}$ steigt steiler als die Funktion mit Basis $a = \frac{5}{4}$.

Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen

Die Lehrmittelreihe VON NULL AUF MATHE vermittelt alle grundlegenden Kompetenzen in Algebra, Analysis, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wirtschaftsmathematik. Sie führt Schritt für Schritt durch die Inhalte und steht Ihnen dabei als Lerncoach zur Seite.

Die Erklärungen beginnen bewusst bei den Grundlagen, um auch Lernenden ohne Vorkenntnisse den Einstieg zu erleichtern. Komplexe Themen werden in kleine, verständliche Einheiten gegliedert, die logisch aufeinander aufbauen. Das Konzept lädt zum aktiven Lernen ein. Sie werden motiviert, Aufgaben zu lösen und Ihren Lernerfolg durch Selbstreflexion zu überprüfen. Diese Arbeitsmethodik, unterstützt durch grafische Elemente, zieht sich wie ein roter Faden durch das gesamte Werk. In kleinen Schritten bauen Sie Ihr Wissen nachhaltig auf und schaffen so ein stabiles Fundament für Ihren Erfolg in Schule, Studium, Beruf und Alltag.

VON NULL AUF MATHE eignet sich ideal zum Selbstlernen, kann aber auch im Unterricht und in der Nachhilfe eingesetzt werden. Jeder Band ist in sich abgeschlossen und ermöglicht das gezielte Wiederholen oder Vertiefen einzelner Themen.

Die Reihe VON NULL AUF MATHE umfasst die folgenden elf Bände:

- Die Grundlagen des Rechnens: Zahlen, Brüche, Prozente und Potenzen
- Rechnen mit Buchstaben: Terme und Bruchterme
- Auf geradem Weg: lineare Gleichungen und Funktionen
- Im Bogen zum Ziel: quadratische Gleichungen und Funktionen
- Gemeinsame Lösungen: lineare Gleichungssysteme
- Das Prinzip der Zuordnung: Einführung in die Funktionen
- Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome
- **Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen**
- Grundlagen der Statistik: Daten, Diagramme, Kennzahlen und Zusammenhänge
- Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik
- Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung

Compendio Bildungsmedien
www.compendio.ch

ISBN 978-3-7155-0141-3



ROMAN OBERHOLZER MSc ETH in Mathematik, Lehrdiplom für Maturitätsschulen
Studium der Mathematik und «Lehrdiplom für Maturitätsschulen» an der ETH Zürich. Im Anschluss daran Lehrperson für Mathematik und Informatik an verschiedenen Schulen, seit 1997 an der KS Alpenquai Luzern. Unterrichtet dort nach einem Studienaufenthalt in den USA auch Mathematik auf Englisch. Langjähriger Berater beim Klett-Verlag.

PETER JANKOVICS Dipl.-Math.
Studium der Mathematik und Physik an der TU Berlin. Danach Lehrbeauftragter an der Hamburger Fern-Hochschule. Als Autor, Lektor und Redaktor für zahlreiche Verlage im Bildungssektor tätig, seit 2018 für Compendio Bildungsmedien.