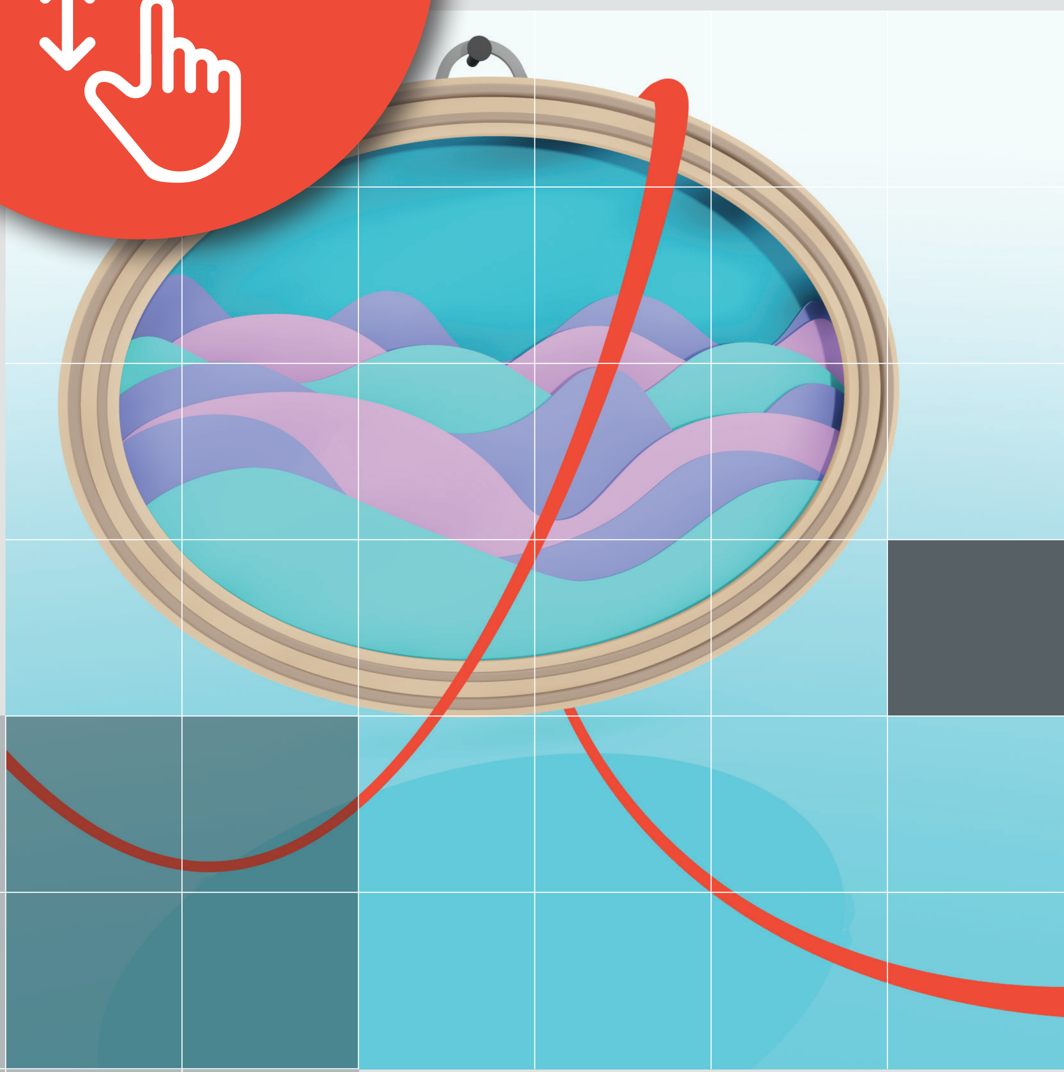
VON NULL AUF MATHE

Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome

Blick ins Buch

, ROMAN OBERHOLZER, PETER JANKOVICS

- Potenzen und Wur
- Potenzgesetze
- Potenzgleichungen
- Wurzelgleichungen
- Potenzfunktionen
- Wurzelfunktionen
- Rechnen mit Polynomen
- Polynomgleichungen
- Polynomfunktionen
- Hoch- und Tiefpunkte
- Symmetrien
- Verhalten im Unendlichen



compendio
Bildungsmedien

VON NULL AUF MATHE

Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome

ROMAN MEIER, ROMAN OBERHOLZER, PETER JANKOVICS

compendio
Bildungsmedien

VON NULL AUF MATHE
Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome
Roman Meier, Roman Oberholzer, Peter Jankovics

Satz: Reemers Publishing Services GmbH, Krefeld
Grafisches Konzept: icona basel gmbh
Coverbild: © Stefan Schmitz, Hamburg
Druck: Edubook AG, Merenschwand
Redaktion und didaktische Bearbeitung: Peter Jankovics

Printausgabe
ISBN: 978-3-7155-0133-8
Artikelnummer: 19530
Auflage: 1. Auflage 2025
Ausgabe: 01N25
Sprache: DE
XMA 507

E-Book-Ausgabe
ISBN: 978-3-7155-0134-5
Artikelnummer: E-19531
Auflage: 1. Auflage 2025
Ausgabe: 01N25
Sprache: DE
XMAE 507

Compendio Bildungsmedien AG
Neunbrunnenstrasse 50
CH-8050 Zürich
Tel. +41 44 368 21 11
info@compendio.ch
www.compendio.ch

Die Printausgabe dieses Buchs ist klimaneutral in der Schweiz gedruckt worden. Die Druckerei Edubook AG hat sich einer Klimaprüfung unterzogen, die primär die Vermeidung und Reduzierung des CO_2-Ausstosses verfolgt. Verbleibende Emissionen kompensiert das Unternehmen durch den Erwerb von CO_2-Zertifikaten eines Schweizer Klimaschutzprojekts. Mehr zum Umweltbekenntnis von Compendio Bildungsmedien finden Sie unter: www.compendio.ch/Umwelt

Inhaltsverzeichnis

Aufbau und Methodik des Lehrmittels 5

Vorwissen und Lernziele 7

Teil A **Potenz- und Wurzelfunktionen** 9

1 Wie rechnet man mit Potenzen und Wurzeln? 10
1.1 Potenzen und Wurzeln 10
1.2 Potenzgesetze 13
1.3 Übungsaufgaben 15

2 Wie werden Potenzgleichungen mit ganzzahligen Exponenten gelöst? 16
2.1 Potenzgleichungen mit natürlichen Exponenten 16
2.2 Potenzgleichungen mit geraden Exponenten 17
2.3 Potenzgleichungen mit ungeraden Exponenten 18
2.4 Potenzgleichungen mit negativen Exponenten 19
2.5 Übungsaufgaben 21

3 Wie werden Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten gelöst? 22
3.1 Wurzelgleichungen sind Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten 22
3.2 Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten lösen 25
3.3 Übungsaufgaben 28

4 Welche Eigenschaften haben Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten? 29
4.1 Potenzfunktionen 30
4.2 Potenzfunktionen mit geraden Exponenten 30
4.3 Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten 31
4.4 Eigenschaften von Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten 32
4.5 Übungsaufgaben 34

5 Welche Eigenschaften haben Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten? 36
5.1 Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten 37
5.2 Potenzfunktionen mit negativen geraden Exponenten 37
5.3 Potenzfunktionen mit negativen ungeraden Exponenten 38
5.4 Eigenschaften von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten 39
5.5 Übungsaufgaben 41

6 Wie sieht der Graph einer Wurzelfunktion aus? 42
6.1 Die Quadratwurzelfunktion 42
6.2 Die Quadratwurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion 43
6.3 Allgemeine Wurzelfunktionen 45
6.4 Übungsaufgaben 46

7 Welche Eigenschaften haben Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten? 48
7.1 Potenzfunktionen mit positiven rationalen Exponenten 49
7.2 Potenzfunktionen mit negativen rationalen Exponenten 50
7.3 Übungsaufgaben 51

Teil B **Polynome und Polynomfunktionen** **53**

8 Was sind Polynome und wie rechnet man mit ihnen? **54**
8.1 Polynome 54
8.2 Rechnen mit Polynomen 57
8.3 Übungsaufgaben 60

9 Was sind Polynomgleichungen? **61**
9.1 Polynomgleichungen 61
9.2 Lösen von Polynomgleichungen in Produktform 62
9.3 Übungsaufgaben 64

10 Was sind Polynomfunktionen und wo schneiden sie die Koordinatenachsen? **65**
10.1 Polynomfunktionen 66
10.2 Schnittpunkte mit der x-Achse 68
10.3 Übungsaufgaben 71

11 Welche Eigenschaften besitzen Polynomfunktionen? **73**
11.1 Hoch- und Tiefpunkte 74
11.2 Achsen- und Punktsymmetrie 76
11.3 Verhalten im Unendlichen 79
11.4 Übungsaufgaben 84

12 Wie lässt sich der Graph einer Polynomfunktion skizzieren? **86**
12.1 Graphen qualitativ zeichnen 86
12.2 Übungsaufgaben 88

13 Lernkontrolle – vermischte Aufgaben **89**

Zusammenfassung **93**
Lösungen zu den Aufgaben **102**
Stichwortverzeichnis **139**

3 Wie werden Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten gelöst?

Aufgabe 10

Finden Sie durch Ausprobieren die Lösung der Gleichungen.

a) $\sqrt{x} = 3$

b) $x^3 = 27$

c) $\left(\sqrt{x}\right)^3 = 27$

d) $x^{\frac{3}{2}} = 27$

3.1 Wurzelgleichungen sind Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten

Gleichungen, in denen die Unbekannte unter einer Wurzel vorkommt, heissen **Wurzelgleichungen.** Wurzelgleichungen wie $\sqrt{x} = 9$ oder $\sqrt[5]{x} = 10$ sind nur für $x \geq 0$ definiert. Um eine Wurzelgleichung zu lösen, wird diese durch Potenzieren mit dem Wurzelexponenten in eine Gleichung umgeformt, in der keine Wurzel mehr vorkommt:

$$
\begin{array}{rcll}
\sqrt{x} & = & 9 & |^2 \\
\left(\sqrt{x}\right)^2 & = & 9^2 & |\mathrm{TU} \\
x & = & 81 &
\end{array}
$$

Aber Vorsicht: Beim Potenzieren mit einem **geraden Exponenten** können **Scheinlösungen** entstehen! Daher ist immer, wenn eine Gleichung mit einem geraden Exponenten potenziert wurde, die gefundene Lösung durch eine Einsetzprobe zu überprüfen: $\sqrt{81} = 9$ ist eine wahre Aussage, daher ist $x = 81$ Lösung der Gleichung.

Bei der Gleichung $\sqrt[4]{x} = -2$ potenzieren wir mit dem Exponenten 4:

$$
\begin{array}{rcll}
\sqrt[4]{x} & = & -2 & |^4 \\
\left(\sqrt[4]{x}\right)^4 & = & (-2)^4 & |\mathrm{TU} \\
x & = & 16 &
\end{array}
$$

Die Einsetzprobe $\sqrt[4]{16} = -2$ führt zu einer falschen Aussage. Die Gleichung hat also keine Lösung.

Bei der Gleichung $\sqrt[5]{x} = 10$ potenzieren wir mit dem Exponenten 5:

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{x} &= 10 && |^5 \\ x &= 10000 \end{aligned}$$

Da wir n-te Wurzeln mittels $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ auch als Potenz schreiben können, können wir Wurzelgleichungen auch als **Potenzgleichungen mit rationalen Exponenten** ansehen.

Die Gleichung $\sqrt[5]{x} = 10$ wird so zu $x^{\frac{1}{5}} = 10$, die wir genauso wie oben, durch Potenzieren mit dem Wurzelexponenten, lösen:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{5}} &= 10 && |^5 \\ x^{\frac{1}{5}\cdot 5} &= 10^5 && |\mathrm{TU} \\ x &= 100000 \end{aligned}$$

Alle Wurzelgleichungen $\sqrt[n]{x} = c$ bzw. $x^{\frac{1}{n}} = c$ lösen wir, indem wir die Gleichung mit n potenzieren. Bei der gefundenen Lösung $x = c^n$ muss überprüft werden, ob sie zur Definitionsmenge der Gleichung gehört. Wurde die Gleichung mit einem geraden Exponenten n potenziert, so muss die Lösung ausserdem durch eine Einsetzprobe überprüft werden.

Lösung einer Wurzelgleichung

Eine Wurzelgleichung der Form

$$\sqrt[n]{x} = c \quad \text{bzw.} \quad x^{\frac{1}{n}} = c$$

mit $n \in \mathbb{N}$ ist für $x \geq 0$ definiert.

Sie wird durch Potenzieren mit n gelöst. Ist n gerade, so muss die gefundene Lösung

$$x = c^n$$

durch eine Einsetzprobe überprüft werden.

Beispiele:

Wir lösen die Gleichung $\sqrt[7]{x} = 3$ bzw. $x^{\frac{1}{7}} = 3$:

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{7}} &= 3 && |^7 \\ x^{\frac{1}{7}\cdot 7} &= 3^7 && |\mathrm{TU} \\ x &= 2187 \end{aligned}$$

Wir lösen die Gleichung $8 \cdot \sqrt[3]{x} = 2$ bzw. $8x^{\frac{1}{3}} = 2$:

$$\begin{aligned} 8x^{\frac{1}{3}} &= 2 && |:8 \\ x^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{4} && |^3 \\ x^{\frac{1}{3}\cdot 3} &= \left(\frac{1}{4}\right)^3 && |\mathrm{TU} \\ x &= \frac{1}{64} \end{aligned}$$

Denken Sie daran, erst die Potenz / Wurzel zu isolieren, dann zu potenzieren.

Wir lösen die Gleichung $\frac{5}{2}x^{\frac{1}{5}} = -5$:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}x^{\frac{1}{5}} &= -5 && |\cdot\frac{2}{5} \\ x^{\frac{1}{5}} &= -2 && |^5 \\ x^{\frac{1}{5}\cdot 5} &= (-2)^5 && |\mathrm{TU} \\ x &= -32 \end{aligned}$$

Da $x = -32$ nicht zur Definitionsmenge der Gleichung gehört, besitzt die Gleichung keine Lösung.

Aufgabe 11 Schreiben Sie die Wurzel als Potenz und lösen Sie die Potenzgleichung.

a) $\sqrt[3]{x} - 6 = 0$

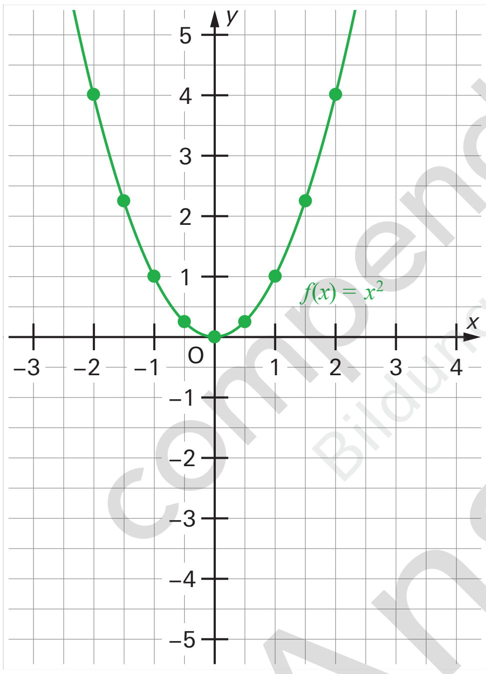
b) $5 \cdot \sqrt[4]{x} - 6 = 9$

4 Welche Eigenschaften haben Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten?

Aufgabe 17

Für die Quadratfunktion $f(x) = x^2$ ist die Wertetabelle ausgefüllt und ihr Graph gezeichnet. Gegeben sind die weiteren Funktionen $g(x) = x^3$ und $h(x) = x^4$.

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x) = x^2$	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$g(x) = x^3$									
$h(x) = x^4$									



a) Füllen Sie für g und h die Wertetabelle aus.

b) Zeichnen Sie die Graphen von g und h ins Koordinatensystem.

c) Welche Punkte haben alle Graphen gemeinsam?

d) Welche Graphen sind achsensymmetrisch, welche punktsymmetrisch?

4.1 Potenzfunktionen

Funktionen wie $f(x) = 3x^5$, $g(x) = 12x^{-4}$ oder $h(x) = -2x^{\frac{1}{3}}$, bei denen die Variable x die Basis einer Potenz ist, heissen **Potenzfunktionen.**

Potenzfunktion

Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^r$, mit $a \neq 0$ und $r \in \mathbb{R}$ heisst **Potenzfunktion.**

Wir betrachten hier Potenzfunktionen $f(x) = ax^n$ mit natürlichen Exponenten $n = 1; 2; 3; ...$

Bei $n = 1$ handelt es sich um eine lineare Funktion $f(x) = ax$, deren Graph eine Gerade ist. Bei $n = 2$ ist $f(x) = ax^2$ eine quadratische Funktion mit einer Parabel als Graphen. Da $f(x) = ax^2$ den Exponenten 2 besitzt, wird sie **Potenzfunktion zweiten Grades** und ihr Graph **Parabel zweiter Ordnung** genannt.

Der **Grad einer Potenzfunktion** ist durch ihren **Exponenten** $n \geq 2$ festgelegt. Die Funktionen $f(x) = 3x^3$, $g(x) = 1.21 \cdot x^3$ und $h(x) = -x^3$ sind alle **Potenzfunktionen dritten Grades** und ihre Graphen sind **Parabeln dritter Ordnung.**

Entsprechend gibt es Potenzfunktionen vierten, fünften oder höheren Grades.

Potenzfunktion mit natürlichen Exponenten

Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = ax^n$, mit $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ heisst **Potenzfunktion n-ten Grades.**

Der Graph einer Potenzfunktion n-ten Grades ($n \geq 2$) heisst **Parabel n-ter Ordnung.**

Da man jede reelle Zahl mit einer natürlichen Zahl potenzieren kann, ist der **Definitionsbereich** einer **Potenzfunktion mit natürlichen Exponenten** die Menge aller reellen Zahlen: $D = \mathbb{R}$. Der **Wertebereich** W ist, je nachdem, ob der Exponent n **gerade** oder **ungerade** ist, zu unterscheiden.

4.2 Potenzfunktionen mit geraden Exponenten

In der Einstiegsaufgabe begegneten uns die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^4$. Wir vergleichen sie mit einer weiteren Potenzfunktionen $h(x) = x^6$, deren Exponent gerade ist:

x	-3	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	3
$f(x) = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$g(x) = x^4$	81	16	1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{1}{16}$	1	16	81
$h(x) = x^6$	729	64	1	$\frac{1}{64}$	0	$\frac{1}{64}$	1	64	729

5.1 Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Potenzfunktionen können auch negative Exponenten haben, z. B. $f(x)=6x^{-1}$, $f(x)=\frac{1}{3}x^{-2}$ oder $f(x)=x^{-7}$. Die Graphen dieser Funktionen heissen **Hyperbeln.** Der Graph von $f(x)=6x^{-1}$ ist eine **Hyperbel erster Ordnung,** der von $f(x)=\frac{1}{3}x^{-2}$ eine **Hyperbel zweiter Ordnung** usw.

Potenzfunktion mit negativen ganzzahligen Exponenten

Der Graph einer Funktion mit der Gleichung $f(x)=ax^{-n}$, mit $a\neq 0$ und $n\in\mathbb{N}$, heisst **Hyperbel n-ter Ordnung.**

Aus $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$ folgt, dass Potenzfunktionen mit negativen Exponenten für $x=0$ nicht definiert sind. Der **Definitionsbereich** einer **Potenzfunktion mit negativen ganzzahligen Exponenten** ist die Menge aller reellen Zahlen ohne die Null: $D=\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Der **Wertebereich** W ist, je nachdem ob n **gerade** oder **ungerade** ist, zu unterscheiden.

5.2 Potenzfunktionen mit negativen geraden Exponenten

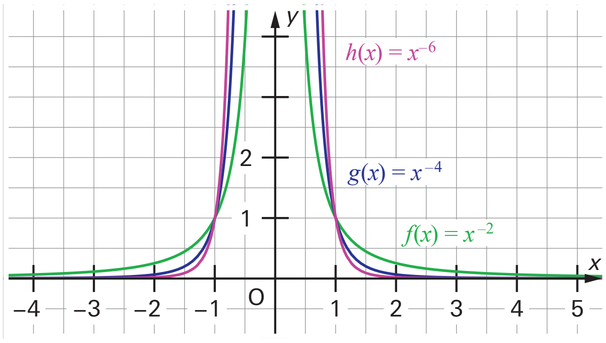
Wir vergleichen die Funktionen $f(x)=x^{-2}$, $g(x)=x^{-4}$ und $h(x)=x^{-6}$, deren Exponenten negativ und gerade sind:

x	-3	-2	-1	-0.5	-0.25	0.25	0.5	1	2	3
$f(x)=x^{-2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$g(x)=x^{-4}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{16}$	1	16	256	256	16	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{81}$
$h(x)=x^{-6}$	$\frac{1}{729}$	$\frac{1}{64}$	1	64	4096	4096	64	1	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{729}$

Betrachten wir die Funktionswerte, stellen wir allgemein fest:

- Die Funktionswerte sind immer positiv. Der Wertebereich umfasst alle positiven reellen Zahlen: $W=\mathbb{R}^+$.
- Bei $x=0$ ist die Funktion nicht definiert.
- Bei $x=1$ und $x=-1$ ist der Funktionswert 1.
- Für jedes x ist der Funktionswert gleich dem Funktionswert bei $-x$, also $f(x)=f(-x)$ für alle x.
- Werden die x-Werte betragsmässig grösser, so werden die Funktionswerte immer kleiner.
- Nähern sich die x-Werte immer mehr der Zahl 0 an, so werden die Funktionswerte immer grösser.

Die Funktionsgraphen sehen so aus:



Für alle Graphen gilt:

- Der Graph ist eine **Hyperbel.** Er besteht aus zwei nicht zusammenhängenden Teilen, den **Hyperbel-Ästen.**
- Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
- Der Graph verläuft oberhalb der x-Achse. Insbesondere besitzt die Funktion keine Nullstelle.
- Für betragsmässig immer grösser werdende x-Werte schmiegen sich die Hyperbel-Äste immer mehr der x-Achse an.
- Nähern sich die x-Werte immer mehr der Zahl 0 an, so werden die Funktionswerte immer grösser.
- Der Graph geht durch die Punkte $(-1|1)$ und $(1|1)$.

5.3 Potenzfunktionen mit negativen ungeraden Exponenten

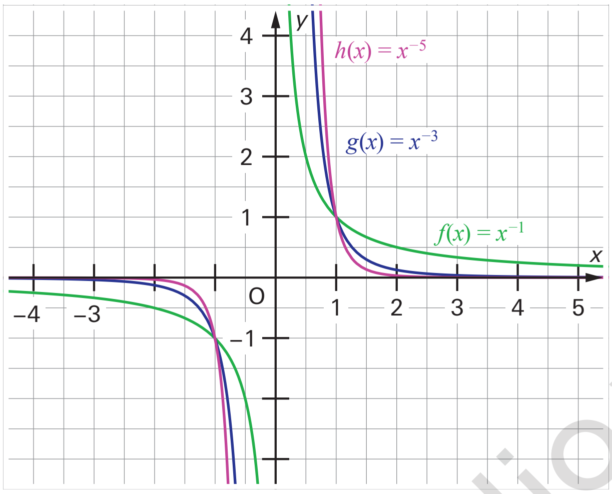
Wir vergleichen die Funktionen $f(x)=x^{-1}$, $g(x)=x^{-3}$ und $h(x)=x^{-5}$, deren Exponenten negativ und gerade sind:

x	-3	-2	-1	-0.5	-0.25	0.25	0.5	1	2	3
$f(x)=x^{-1}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$g(x)=x^{-3}$	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	-1	-8	-64	64	16	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$
$h(x)=x^{-5}$	$-\frac{1}{243}$	$-\frac{1}{32}$	-1	-32	-1025	1024	32	1	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{243}$

Betrachten wir die Funktionswerte der drei Funktionen, stellen wir allgemein fest:

- Die Funktionswerte sind negativ und positiv, aber nie null. Der Wertebereich umfasst alle reellen Zahlen ohne die Null: $W=\mathbb{R}\backslash\{0\}$.
- Bei $x=0$ ist die Funktion nicht definiert.
- Bei $x=1$ ist der Funktionswert 1 und für $x=-1$ ist der Funktionswert -1.
- Für jedes x ist der Funktionswert gleich dem negativen Funktionswert bei $-x$, also $-f(x)=f(-x)$ für alle x.
- Werden die x-Werte betragsmässig grösser, so werden die Funktionswerte betragsmässig immer kleiner.
- Nähern sich die x-Werte immer mehr der Zahl 0 an, so werden die Funktionswerte betragsmässig immer grösser.

Die Funktionsgraphen sehen so aus:



Für alle Graphen gilt:

- Der Graph ist eine **Hyperbel.** Der linke **Hyperbel-Ast** liegt unterhalb der x-Achse, der rechte oberhalb davon.
- Der Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung $O(0|0)$.
- Für betragsmässig immer grösser werdende x-Werte schmiegen sich die Hyperbel-Äste immer mehr der x-Achse an.
- Nähern sich die x-Werte immer mehr der y-Achse an, so werden die Funktionswerte betragsmässig immer grösser.
- Der Graph geht durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

5.4 Eigenschaften von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Auch eine Potenzfunktion mit negativen Exponenten $f(x) = x^{-n}$ kann man durch einen Vorfaktor a strecken, stauchen und an der x-Achse spiegeln. Der Graph einer Funktion $g(x) = ax^{-n}$ ist gegenüber dem Graphen von $f(x) = x^{-n}$

- gestreckt, wenn $|a| > 1$,
- gestaucht, wenn $|a| < 1$, und
- zusätzlich an der x-Achse gespiegelt, wenn $a < 0$.

Wir tragen die wichtigsten Eigenschaften für Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten zusammen:

Eigenschaften von Potenzfunktionen mit negativen ganzzahligen Exponenten

Für jede Potenzfunktion $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Sie ist für alle reellen Zahlen ohne die Null definiert, der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Ist n gerade, so gilt:

- Die Funktionswerte sind immer positiv. Der Wertebereich umfasst alle positiven reellen Zahlen: $W = \mathbb{R}^+$.
- Es ist $f(x) = f(-x)$ für alle x. Der Graph der Funktion ist **achsensymmetrisch** zur y-Achse.

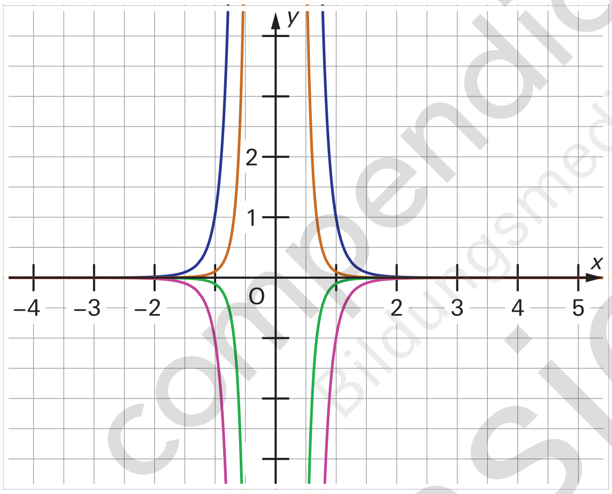
Ist n ungerade, so gilt:

- Der Wertebereich umfasst alle reellen Zahlen ohne die null: $W = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Es ist $-f(x) = f(-x)$ für alle x. Der Graph der Funktion ist **punktsymmetrisch** zum Ursprung $O(0|0)$.

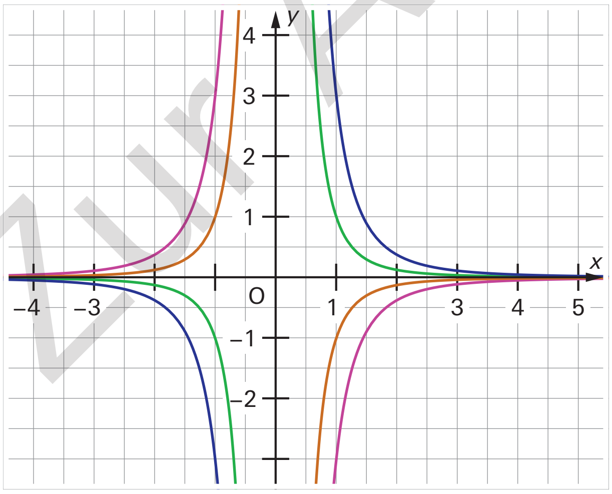
Der Graph der Potenzfunktion $g(x) = ax^{-n}$ ist gegenüber dem Graphen von $f(x) = x^{-n}$

- **gestreckt,** falls $|a| > 1$,
- **gestaucht,** falls $|a| < 1$, und
- an der x-Achse **gespiegelt,** falls $a < 0$.

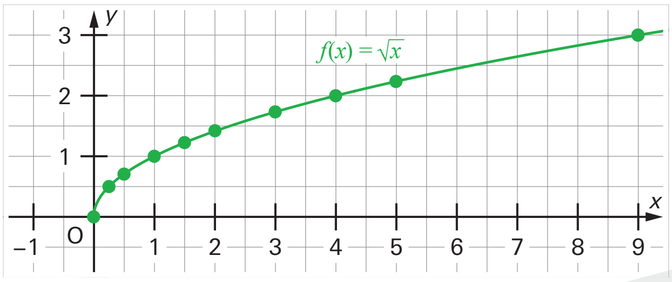
Aufgabe 26 Ordnen Sie die Funktionsterme $f(x) = x^{-6}$, $g(x) = 0.1x^{-6}$, $h(x) = -x^{-6}$ und $k(x) = -0.1x^{-6}$ den Graphen zu.



Aufgabe 27 Ordnen Sie die Funktionsterme $f(x) = x^{-3}$, $g(x) = 3x^{-3}$, $h(x) = -x^{-3}$ und $k(x) = -3x^{-3}$ den Graphen zu.



Daraus erhalten wir den Graphen der Quadratwurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$:



Wir stellen fest:

- Der Graph beginnt im Ursprung $O(0|0)$.
- Der Wertebereich ist $W = \mathbb{R}_0^+$.
- Die Funktion ist monoton wachsend.

6.2 Die Quadratwurzelfunktion als Umkehrung der Quadratfunktion

Quadrieren wir die Zahl 3, so erhalten wir $3^2 = 9$. Durch Wurzelziehen können wir diese Operation wieder rückgängig machen: $\sqrt{9} = 3$. Das Wurzelziehen macht also das Quadrieren einer positiven Zahl rückgängig und umgekehrt:

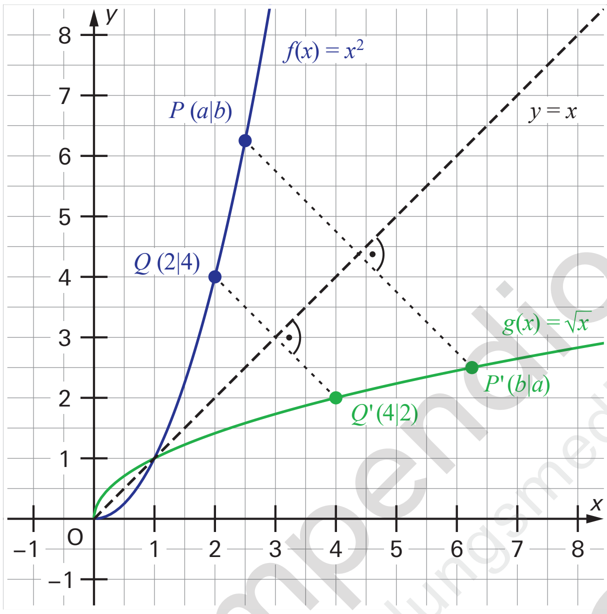
Das funktioniert aber nur bei nichtnegativen Zahlen. Quadrieren wir die Zahl -3, so erhalten wir $(-3)^2 = 9$. Durch Wurzelziehen können wir diese Operation nicht rückgängig machen: $\sqrt{9} = 3 \neq -3$. Wir schränken deshalb unsere Betrachtungsweise auf Zahlen x mit $x \geq 0$ ein.

Wenn wir bei einer nichtnegativen Zahl Quadrieren und Wurzelziehen hintereinander ausführen, bekommen wir als Ergebnis die ursprüngliche Zahl, unabhängig von der Reihenfolge. Zum Beispiel bei der Zahl 16:

$$\sqrt{16^2} = \sqrt{256} = 16$$
$$\left(\sqrt{16}\right)^2 = 4^2 = 16$$

Quadrieren und Wurzelziehen sind daher **Umkehroperationen.** Bei den zugehörigen Funktionen, der Quadratfunktion $f(x) = x^2$ und der Quadratwurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$, spricht man von **Umkehrfunktionen.** Und wie verhalten sich die Graphen von Umkehrfunktionen?

Der Punkt $Q(2|4)$ liegt auf dem Graphen von $f(x)=x^2$. Der Punkt $Q'(4|2)$ mit vertauschten Koordinaten liegt auf dem Graphen von $g(x)=\sqrt{x}$. Dies ist kein Zufall, sondern gilt allgemein: Liegt $P(a|b)$ auf dem Graphen von $f(x)=x^2$, so liegt $P'(b|a)$ auf dem Graphen von $g(x)=\sqrt{x}$. Wir schauen uns an, was das Vertauschen der Koordinaten geometrisch bedeutet:



Wir sehen, dass das Vertauschen der Koordinaten eine **Spiegelung** an der eingezeichneten Gerade $y=x$ bedeutet. Diese Gerade nennt man **erste Winkelhalbierende,** weil sie die Winkelhalbierende der beiden Koordinatenachsen im I. Quadranten ist. Das **Vertauschen** von x- und y-Koordinaten entspricht also der **Spiegelung an der ersten Winkelhalbierenden.**

Das bedeutet, den Graphen der Quadratwurzelfunktion erhält man durch Spiegelung der auf $x \geq 0$ eingeschränkten Quadratfunktion:

Wir fassen zusammen:

Quadratwurzelfunktion und Quadratfunktion sind Umkehrfunktionen

Die Quadratwurzelfunktion

$$g(x)=\sqrt{x}$$

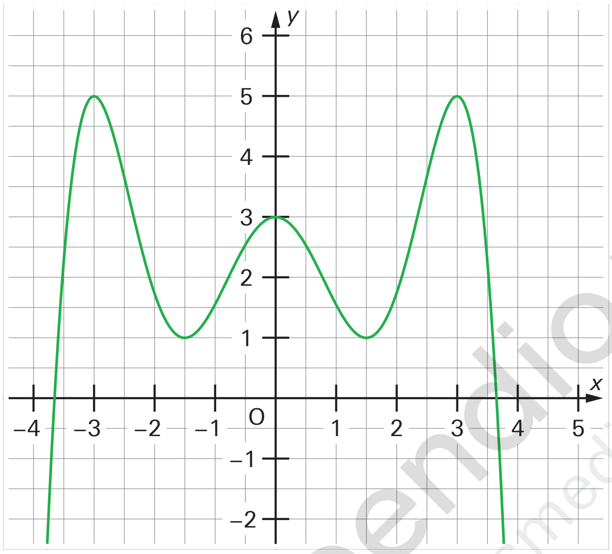
ist die **Umkehrfunktion** der auf $x \geq 0$ eingeschränkten Quadratfunktion:

$$f(x)=x^2$$

Die beiden Graphen von f und g gehen durch **Spiegelung** an der **ersten Winkelhalbierenden,** der Geraden $y=x$, auseinander hervor.

11 Welche Eigenschaften besitzen Polynomfunktionen?

Aufgabe 62 Sie sehen den Graphen einer Polynomfunktion:



a) Wo befinden sich die Hoch- und Tiefpunkte? Lesen Sie die Koordinaten am Graphen ab.

b) Was ist der grösste Funktionswert der Funktion und wo befindet er sich?

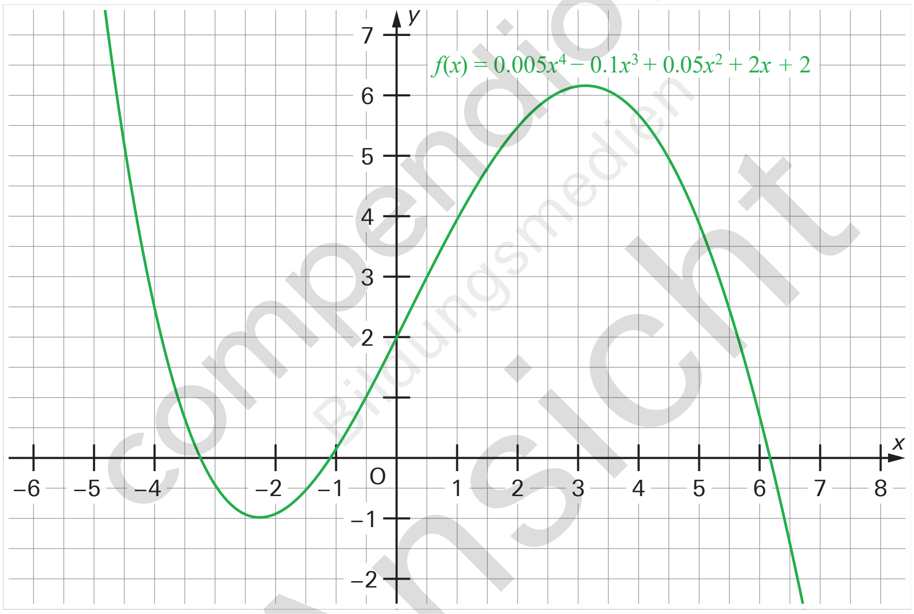
c) Was ist der kleinste Funktionswert und wo befindet er sich?

d) Erkennen Sie am Graphen eine Symmetrie?

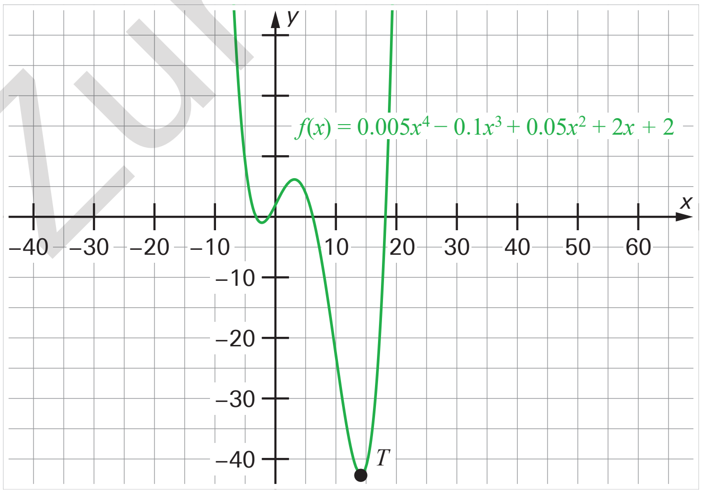
☐	Ist $x_1 = 2$ eine Nullstelle einer geraden Funktion, so ist $x_2 = -2$ auch eine Nullstelle der Funktion.
☐	Ist $x_1 = 2$ eine Nullstelle einer ungeraden Funktion, so ist $x_2 = -2$ auch eine Nullstelle der Funktion.
☐	Ist $H(-3\|5)$ Hochpunkt einer ungeraden Funktion, so ist $H(3\|-5)$ auch ein Hochpunkt.

11.3 Verhalten im Unendlichen

Wir betrachten den Graphen der Polynomfunktion $f(x) = 0.005x^4 - 0.1x^3 + 0.05x^2 + 2x + 2$:



Nach links steigt der Graph nach oben und nach rechts fällt er steil nach unten. Man könnte vermuten, dass der Graph nach rechts (also für immer grössere x-Werte) immer weiter nach unten fällt und nach links (also für immer kleinere x-Werte) immer weiter nach oben steigt. Wir zoomen den Ausschnitt heraus:



Wir sehen jetzt, dass der Graph weiter rechts, bei ungefähr $T(14|-43)$, einen weiteren Tiefpunkt besitzt und danach steil nach oben steigt. Aber auch hier sehen wir nur einen

Ausschnitt und wissen nicht, ob der Graph nach links und nach rechts immer weiter nach oben geht. Um das zu erfahren, untersuchen wir das **Verhalten im Unendlichen.**
Das «Verhalten im Unendlichen» gibt an, wie sich der Graph einer Funktion verhält, wenn die x-Werte gegen unendlich (positiv oder negativ) streben. Wir wollen also wissen, was mit den Funktionswerten passiert, wenn die Variable x extrem grosse oder extrem kleine Werte annimmt.

Wenn wir bei der Polynomfunktion $f(x)=0.005x^4-0.1x^3+0.05x^2+2x+2$ sehr grosse Zahlen eingeben, so liefert das erste Glied $0.005x^4$ irgendwann den Hauptbeitrag zum Funktionswert $f(x)$ und die Glieder mit kleineren Potenzen spielen (anteilmässig) immer weniger eine Rolle. Das sehen wir, wenn wir $f(x)$ und $0.005x^4$ für grosse x-Werte vergleichen:

x	$f(x)=0.005x^4-0.1x^3+0.05x^2+2x+2$	$0.005x^4$
10	−73	50
100	399302	500000
1000	4899948002	5000000000

Die relative Abweichung wird für noch grössere x-Werte immer kleiner werden. Das Gleiche gilt auch für extrem kleine Werte:

x	$f(x)=0.005x^4-0.1x^3+0.05x^2+2x+2$	$0.005x^4$
−10	167	50
−100	599702	500000
−1000	5099952002	5000000000

Das bedeutet, die Polynomfunktion $f(x)=0.005x^4-0.1x^3+0.05x^2+2x+2$ verhält sich im Unendlichen wie das Glied $0.005x^4$:

- **Verhalten für unendlich grosse Zahlen:** Setzen wir in $0.005x^4$ eine sehr grosse Zahl ein, so bleibt der Wert positiv. Wenn wir immer grössere Zahlen einsetzen, werden wir immer grössere Werte erhalten. Wir sagen: «Für x gegen unendlich streben die Funktionswerte gegen unendlich.» Und schreiben: «$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$»
- **Verhalten für unendlich kleine Zahlen:** Setzen wir in $0.005x^4$ eine sehr kleine (negative) Zahl ein, so ist der Wert positiv, da der Exponent gerade ist. Wenn wir immer kleinere Zahlen einsetzen, werden wir immer grössere Werte erhalten. Wir sagen: «Für x gegen minus unendlich streben die Funktionswerte gegen unendlich.» Und schreiben: «$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$»

Für den Graphen bedeutet $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, dass er sowohl für immer grösser als auch für immer kleiner werdende x-Werte unendlich weit nach oben geht.

Untersuchen wir nun die Funktion $f(x)=-2x^3+5x^2-x+1$. Auch hier entscheidet das Glied mit der grössten Potenz, also $-2x^3$, über das Verhalten im Unendlichen:

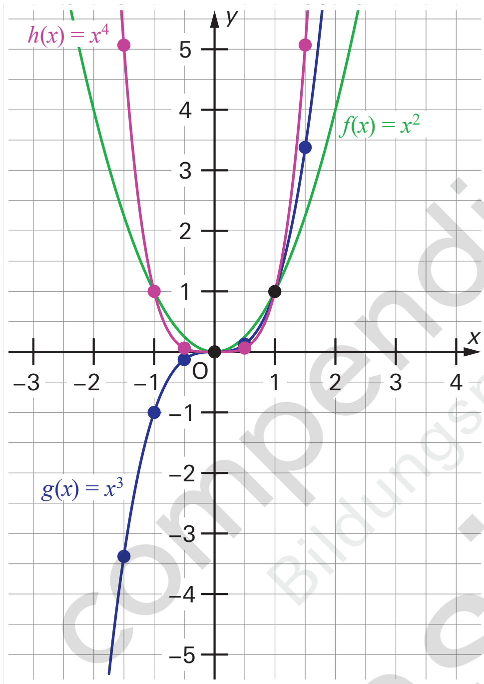
- **Verhalten für unendlich grosse Zahlen:** Setzen wir in $-2x^3$ eine sehr grosse Zahl ein, so wird der Wert wegen des negativen Leitkoeffizienten -2 negativ. Wenn wir immer grössere Zahlen einsetzen, werden wir immer kleinere Funktionswerte erhalten. Für x gegen unendlich streben die Funktionswerte gegen minus unendlich: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$.

Aufgabe 17

a) Wertetabelle:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x)=x^2$	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$g(x)=x^3$	-8	-3.375	-1	-0.125	0	0.125	1	3.375	8
$h(x)=x^4$	16	5.0625	1	0.0625	0	0.0625	1	5.0625	16

b) Grafik:



c) Alle drei Graphen gehen durch den Ursprung $O(0|0)$ und durch den Punkt $P(1|1)$.

d) Die beiden Graphen von f und h sind achsensymmetrisch zur y-Achse. Der Graph von g ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Aufgabe 18

Blauer Graph: $f(x)=x^6$; brauner Graph: $g(x)=0.1x^6$; lila Graph: $h(x)=-x^6$; grüner Graph: $k(x)=-0.1x^6$.

Aufgabe 19

Grüner Graph: $f(x)=x^3$; blauer Graph: $g(x)=3x^3$; oranger Graph: $h(x)=-x^3$; lila Graph: $k(x)=-3x^3$.

Aufgabe 20

a) Die Aussage ist falsch, dies gilt nur für Graphen einer Potenzfunktion $f(x)=x^n$ mit ungeradem n.

b) Die Aussage ist falsch, beim Vorfaktor geht es nicht um gerade oder ungerade. Der Graph ist gespiegelt, wenn der Vorfaktor negativ ist.

c) Die Aussage ist wahr. Da der Graph von $f(x)=x^n$, mit n ungerade, monoton steigend ist, ist der gespiegelte Graph monoton fallend.

d) Die Aussage ist wahr und gilt auch für $a>0$. Da der Graph von $f(x)=x^n$, mit n gerade, achsensymmetrisch ist, ist auch der gestreckte und gespiegelte Graph achsensymmetrisch.

e) Die Aussage ist falsch. Die Aussage gilt nur für gerades n. Für ungerades n liegt der Graph von $f(x)=3x^n$ im negativen Bereich unterhalb $g(x)=x^n$.

Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome

Die Lehrmittelreihe VON NULL AUF MATHE vermittelt alle grundlegenden Kompetenzen in Algebra, Analysis, Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wirtschaftsmathematik. Sie führt Schritt für Schritt durch die Inhalte und steht Ihnen dabei als Lerncoach zur Seite.

Die Erklärungen beginnen bewusst bei den Grundlagen, um auch Lernenden ohne Vorkenntnisse den Einstieg zu erleichtern. Komplexe Themen werden in kleine, verständliche Einheiten gegliedert, die logisch aufeinander aufbauen. Das Konzept lädt zum aktiven Lernen ein. Sie werden motiviert, Aufgaben zu lösen und Ihren Lernerfolg durch Selbstreflexion zu überprüfen. Diese Arbeitsmethodik, unterstützt durch grafische Elemente, zieht sich wie ein roter Faden durch das gesamte Werk. In kleinen Schritten bauen Sie Ihr Wissen nachhaltig auf und schaffen so ein stabiles Fundament für Ihren Erfolg in Schule, Studium, Beruf und Alltag.

VON NULL AUF MATHE eignet sich ideal zum Selbstlernen, kann aber auch im Unterricht und in der Nachhilfe eingesetzt werden. Jeder Band ist in sich abgeschlossen und ermöglicht das gezielte Wiederholen oder Vertiefen einzelner Themen.

Die Reihe VON NULL AUF MATHE umfasst die folgenden elf Bände:

- Die Grundlagen des Rechnens: Zahlen, Brüche, Prozente und Potenzen
- Rechnen mit Buchstaben: Terme und Bruchterme
- Auf geradem Weg: lineare Gleichungen und Funktionen
- Im Bogen zum Ziel: quadratische Gleichungen und Funktionen
- Gemeinsame Lösungen: lineare Gleichungssysteme
- Das Prinzip der Zuordnung: Einführung in die Funktionen
- **Funktionen mit Tiefgang: Potenzen, Wurzeln und Polynome**
- Wachstum im Blick: Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Grundlagen der Statistik: Daten, Diagramme, Kennzahlen und Zusammenhänge
- Dem Zufall auf der Spur: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik
- Mathematik für Wirtschaft und Finanzen: Zinsen, Preise und Optimierung

Compendio Bildungsmedien
www.compendio.ch

ISBN 978-3-7155-0133-8

ROMAN MEIER MSc UZH in Mathematik, Lehrdiplom für Maturitätsschulen
Nach der Ausbildung zum Gartenbauer und dem Abschluss an der Aargauischen Maturitätsschule für Erwachsene Studium der Mathematik, Physik und Wirtschaftswissenschaften. Danach wissenschaftlicher Mitarbeiter an Fachhochschulen in Zürich und Brugg und Prorektor an einem Aargauer Gymnasium. Prüfungsexperte SBFI. Langjähriger Mittelschullehrer im ersten und zweiten Bildungsweg. Dozent für Fachdidaktik an der FHNW.

ROMAN OBERHOLZER MSc ETH in Mathematik, Lehrdiplom für Maturitätsschulen
Studium der Mathematik und «Lehrdiplom für Maturitätsschulen» an der ETH Zürich. Im Anschluss daran Lehrperson für Mathematik und Informatik an verschiedenen Schulen, seit 1997 an der KS Alpenquai Luzern. Unterrichtet dort nach einem Studienaufenthalt in den USA auch Mathematik auf Englisch. Langjähriger Berater beim Klett-Verlag.

PETER JANKOVICS Dipl.-Math.
Studium der Mathematik und Physik an der TU Berlin. Danach Lehrbeauftragter an der Hamburger Fern-Hochschule. Als Autor, Lektor und Redaktor für zahlreiche Verlage im Bildungssektor tätig, seit 2018 für Compendio Bildungsmedien.